



# Synthèse de Lois de Commande à Gains Programmés pour la Stabilisation en Roulis des Navires

Hervé Tanguy

## ► To cite this version:

Hervé Tanguy. Synthèse de Lois de Commande à Gains Programmés pour la Stabilisation en Roulis des Navires. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2004. Français. NNT : . tel-00109896

**HAL Id: tel-00109896**

**<https://theses.hal.science/tel-00109896>**

Submitted on 25 Oct 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

*Année 2003/2004*

Thèse de Doctorat

*Diplôme délivré conjointement par  
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes*

Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE APPLIQUÉE

Présentée et soutenue publiquement par

HERVÉ TANGUY

le 14 janvier 2004  
à l'École Centrale de Nantes

**SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDE À GAINS PROGRAMMÉS POUR LA STABILISATION EN ROULIS DES NAVIRES**

**DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :**

Rapporteurs : Benoît BERGEON, Professeur, Université de Bordeaux I  
Michel DE MATHELIN, Professeur, Université Louis Pasteur – Strasbourg I  
Examineurs : Geoff ROBERTS, Professeur, University of Wales College, Newport  
Claude MOOG, Directeur de Recherche CNRS, Ecole Centrale de Nantes  
Olivier DOUCY, Ingénieur SIREHNA, Nantes  
Guy LEBRET, Maître de Conférence, Ecole Centrale de Nantes



# Merci

Les travaux matérialisés par ce rapport de thèse ont été financés dans le cadre d'une bourse CIFRE. Mes travaux se sont déroulés dans leur intégralité dans les locaux de SIREHNA, entreprise de recherche et développement dans le domaine maritime, située à Nantes, en collaboration avec l'École Centrale de Nantes et l'IRCCyN – Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes.

Je tiens à remercier Jean-Pierre Le Goff, président du directoire de SIREHNA, et Jean-François Lafay, directeur de l'IRCCyN, pour m'avoir permis de mener mes travaux dans leurs établissements respectifs.

Mes très vifs remerciements vont, parce qu'ils ont accepté la tâche d'être rapporteurs de cette thèse, à Michel de Mathelin et Benoît Bergeon, qui de plus m'a fait l'honneur d'être président du jury. Je remercie particulièrement Geoff Roberts pour avoir accepté, malgré les barrières linguistiques d'être membre du jury. I am indeed most grateful to Geoff Roberts, who despite the language barrier accepted to be a member of the jury.

Je ne saurais trop remercier mes encadrants : Guy Lebret pour l'IRCCyN et Olivier Doucy pour SIREHNA. Leur aide m'a été précieuse au long de ces trois années, et surtout au cours de la dernière phase de la rédaction du présent mémoire. Je remercie également Claude Moog, qui dirigea officiellement mes travaux.

Et puis voilà. Il y a les autres... Ce sont ceux que j'ai côtoyé au quotidien, qui ont partagé le steak-frites du midi, ceux qui sont passés prendre un verre le soir... « Ils »: thésards, stagiaires et personnels de l'IRCCyN, et tout le personnel de SIREHNA que j'ai côtoyé, de loin ou de plus près : Alessandro, Christelle, Fabrice, Marc, Nicolas, et Philippe avec qui les repas en commun le midi ont maintenu mon moral.

Grand merci à tous ceux qui ont supporté mes humeurs, tous ceux qui m'ont apporté une aide, petite parfois, considérable souvent, mais saine :

- à ma famille au grand complet,
- à Benoît et Päivi, parce que même en étant loin, vous êtes proches ;
- à Philippe, et Pascal, pour n'avoir pas compté temps et efforts ;
- au Club Alpin Français de Nantes, qui m'a fait prendre de la hauteur, à Julien, Béatrice, Édith, Bernard, Anne, Vincent, et les autres...

Et finalement, à Christin. Warum ? Darum.



« Mehr Licht ! »

Johann Wolfgang von Goethe

« Heb dec'h hag heb warc'hoaz  
Hirio ne dalv ket c'hoaz. »

« Sans hier et sans demain  
Aujourd'hui ne vaut rien. »

Per Jakez Helias



# Table des matières

<b>Merci.....</b>	<b>III</b>
<b>Notations et abréviations.....</b>	<b>XI</b>
<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>Partie A Modélisation.....</b>	<b>9</b>
Chapitre I Introduction.....	11
I.1 Contribution.....	12
I.2 Plan de cette partie.....	12
Chapitre II L'environnement – la houle.....	15
II.1 Description de la houle.....	15
II.2 Notion d'état de mer.....	16
II.2.a Spectre d'état de mer.....	17
II.2.b Analyse du spectre d'état de mer.....	19
II.3 Approche mathématique de la houle régulière.....	21
II.3.a Introduction.....	21
II.3.b Formulation mathématique [42].....	21
II.3.c Solutions du problème linéarisé.....	23
II.4 Houle irrégulière.....	25
II.5 Simulation de la houle aléatoire.....	25
Chapitre III Dynamique du navire sur la houle.....	27
III.1 Mécanique du navire.....	28
III.1.a Repères de travail.....	28
III.1.b Équation fondamentale de la mécanique.....	32
III.1.c Description des efforts hydrodynamiques.....	34
III.1.d Modèle dynamique.....	39
III.1.e Simulation des perturbations.....	42
III.2 Efforts produits par des ailerons.....	44



III.2.a Incidence véritable.....	46
III.2.b Efforts de stabilisation.....	47
III.2.c servogouvernes.....	48
Chapitre IV Modèles.....	51

## **Partie B Synthèse des correcteurs.....53**

Chapitre I Introduction.....	55
I.1 Rappels de modélisation.....	55
I.2 Lois de commande en atténuation du roulis.....	57
I.3 Démarche de synthèse des lois de commande.....	61
Chapitre II Calcul des correcteurs pour des points de fonctionnement donnés.....	65
II.1 Performances et contraintes définissant le cahier des charges.....	66
II.1.a Les performances à atteindre.....	66
II.1.b Les contraintes à prendre en compte.....	67
II.2 Évaluation pratique des performances et contraintes.....	69
II.2.a Choix du domaine de calcul : temporel ou fréquentiel.....	69
II.2.b Calcul des puissances moyennes du roulis et de la commande.....	71
II.2.c Répartition de la puissance de stabilisation.....	73
II.2.d Évaluation des taux de saturation.....	75
II.2.e Stabilité.....	76
II.3 Optimisation des lois de commande.....	79
II.3.a Méthodologie de synthèse.....	79
II.3.b Interprétation du cahier des charges.....	81
II.3.c Notions d'optimisation multi-objectifs.....	82
II.4 Application à la synthèse des correcteurs PID.....	85
II.5 Application à la synthèse des correcteurs $H_\infty$ .....	86
II.5.a Modèle standard.....	87
II.5.b Description des pondérations.....	90
II.5.c Aspects pratiques de la synthèse $H_\infty$ .....	97
II.6 Simulations et comparaisons.....	98
II.6.a Conditions de simulation.....	98
II.6.b Points de fonctionnement.....	99

II.6.c Comparaison des correcteurs.....	100
II.6.d Discrétisation des correcteurs $H_\infty$ .....	101
II.6.e Simulateur de mouvements.....	101
II.6.f Correcteurs PID adaptés.....	103
II.6.g Correcteurs $H_\infty$ adaptés.....	114
II.6.h Comparaison des performances des correcteurs $H_\infty$ et PID.....	120
II.7 Conclusion.....	127
<b>Chapitre III Synthèse d'un correcteur à gains programmés.....</b>	<b>129</b>
III.1 Modélisation d'un système à paramètres variants.....	131
III.1.a Représentation affine.....	132
III.1.b Représentation polytopique.....	133
III.1.c Représentation LFT.....	135
III.1.d Performance quadratique $H_\infty$ d'un système LPV.....	136
III.2 Des techniques de synthèse d'un correcteur à gains programmés.....	138
III.2.a Synthèse d'un correcteur polytopique.....	139
III.2.b Synthèse d'un correcteur LFT.....	141
III.3 Synthèse d'un correcteur polytopique : application à la stabilisation en roulis.....	144
III.3.a Choix des points de fonctionnement.....	144
III.3.b Réglage des correcteurs à chaque point de fonctionnement.....	145
III.3.c Interpolation des résultats de réglage.....	147
III.3.d Calcul du modèle standard polytopique.....	148
III.3.e Calcul du correcteur polytopique.....	151
III.4 Application en simulation.....	153
III.4.a Application du correcteur en temps discret.....	153
III.4.b Outil de simulation.....	155
III.4.c Variations des paramètres pendant une simulation.....	155
III.4.d Intérêt de l'adaptation.....	157
III.4.e Comparaisons entre correcteur polytopique et correcteur statique.....	159
III.5 Conclusion.....	161
<b>Partie C Conclusion.....</b>	<b>163</b>
<b>Références.....</b>	<b>169</b>



## Notations et abréviations

Les grandeurs vectorielles seront, pour les distinguer des grandeurs scalaires, notées en gras :

- grandeur scalaire  $x$
- grandeur vectorielle  $\mathbf{x}$

Abréviations	Signification
SISO	<i>Single Input - Single Output</i> (système à une entrée et une sortie)
MIMO	<i>Multiple Input - Multiple Output</i> (système comportant plusieurs entrées et plusieurs sorties)
AS	Ailerons de Stabilisation
AG	Ailerons de Gouvernail
RRS	<i>Rudder Roll Stabilisation</i> (Stabilisation du roulis en utilisant le gouvernail)
LTI	système Linéaire à Temps Invariant (stationnaire)
LPV	système Linéaire à Paramètres Variants
LTV	système Linéaire à Temps Variant (instationnaire)
LFT	<i>Linear Fractional Transform</i> (Transformée Fractionnaire Linéaire)

Symbole	Signification
$\alpha_i$	coordonnées polytopiques
$\alpha$	braquage réalisé des AS
$\beta$	angle d'incidence d'une surface portante dans un fluide
$\gamma$	valeur de la norme $H_\infty$ d'un système LTI / performance quadratique d'un système LPV
$\delta$	braquage réalisé des AG
$\epsilon$	cambrure de la houle: $\epsilon = H/\lambda$
$\boldsymbol{\eta}$	vecteur position d'un point (ou du navire) dans le plan: $\boldsymbol{\eta}=(x,y)$
$\boldsymbol{\theta}$	vecteur des paramètres variants
$\theta$	angle de tangage du navire
$\lambda$	longueur d'onde de la houle
$\mu$	valeur singulière structurée
$\xi$	hauteur de la surface libre
$\rho$	masse volumique de l'eau
$\boldsymbol{\sigma}_K(\omega)$	vecteur des valeurs singulières du système $K$ à la pulsation $\omega$
$\bar{\sigma}_K(\omega)$	valeur singulière maximale du système $K$
$\varphi$	angle de roulis du navire

<b>Symbole</b>	<b>Signification</b>
$\Phi$	fonction potentiel de la houle (résolution des équations hydrodynamiques)
$\psi$	cap du navire
$\psi_e$	Angle de rencontre de la houle par le navire
$\omega$	pulsation d'un signal sinusoïdal (en rad/s)

<b>Symbole</b>	<b>Signification</b>
A,B,C,D	matrices d'état d'un système dynamique linéaire (et possiblement variant)
d	profondeur du fond dans le calcul de la houle
g	accélération de la gravité
$H_{1/3}$	hauteur moyenne du tiers des plus hautes vagues
$H_s$	hauteur significative de la surface libre, caractérisant l'état de mer
<b>i</b>	vecteur unitaire
k	nombre d'onde
$K_p$	coefficient proportionnel d'un PID
$K_d$	coefficient dérivé d'un PID
$K_{2d}$	coefficient doublement dérivé d'un PID
$K_i$	points sommets du correcteur sous forme polytopique
<b>K</b>	correcteur
$P_i$	points sommets du modèle standard sous forme polytopique
$s=j\omega$	variable de Laplace
$S_{xx}(\omega)$	spectre de puissance du signal $x$
$U_0$	vitesse moyenne du navire
u,v,w	vitesse du navire par rapport au repère géographique (repère inertiel), exprimé dans le repère de manoeuvrabilité
x,y,z	position du navire dans le repère géographique (repère inertiel)
<b>x</b>	Vecteur d'état du navire $x = (x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi)$

## Introduction



---

La mer et les océans sont un univers particulier, parcouru à la fois pour des motifs économiques, sociaux, stratégiques, mais aussi de loisir. Le transport de marchandises, de pétrole, de minerais, les croisières touristiques, sont autant d'éléments importants des échanges commerciaux mondiaux. Tout aussi importants sont les transports des passagers, pour relier les hommes entre eux : d'une île à l'autre, d'un bord à l'autre d'un détroit, d'une mer, d'un océan. L'occupation et la surveillance de cet univers est cruciale du point de vue stratégique. Enfin, les océans sont un espace de loisir au travers des croisières, des compétitions sportives ou simplement du plaisir de naviguer à la voile ou à moteur.

Toutes ces activités sont soumises aux *alea* de la météorologie et de la mer. La houle, les courants, le vent sont des phénomènes à prendre en compte avant de prendre la mer, car ils ont une influence considérable sur l'utilisation des navires. La croisière touristique, sympathique sur une mer calme deviendra vite un enfer sur une mer démontée ; de la même façon, le transport de matières dangereuses, sûr par temps calme, se révélera périlleux et nocif pour la mer elle-même dans ces conditions de mer difficiles. Chaque navire a un domaine d'opération, en dehors duquel son utilisation est délicate : ce domaine est défini en fonction de l'état de la mer (la hauteur des vagues, leur période, leur direction), du vent, des courants, de la vitesse et de la direction du navire par rapport à la mer. En fonction de ses nécessités d'utilisation, chaque navire est équipé de dispositifs permettant d'automatiser les manœuvres : pilote automatique, dispositif de manœuvres à basse vitesse, système de positionnement dynamique, système de stabilisation, etc. Ces systèmes permettent d'élargir le domaine d'utilisation opérationnelle des navires.

Nous considérerons dans ce mémoire les mouvements de roulis sur la houle, parce que ce mouvement est inconfortable et résonant. Différents dispositifs, passifs ou actifs, permettent de créer des efforts stabilisants en roulis. Parmi les systèmes actifs, c'est à dire nécessitant une loi de commande, nous considérerons des surfaces portantes (ailerons de stabilisation et gouvernails), car elles sont très souvent utilisées en pratique. C'est le système de stabilisation **et** la loi de commande qui définissent les performances accessibles par le navire.

Lors de l'évolution du navire, les conditions d'environnement ne restent jamais vraiment les mêmes. Elles changent avec des vitesses très variables, selon les conditions météorologiques, la saison, l'endroit géographique. Le vent tourne, forcit ou faiblit. Les vagues changent de direction, grossissent ou faiblissent elles-aussi. Les courants tournent ou changent de vitesse. Toutes ces modifications dans l'environnement du navire influencent naturellement de façon importante ses mouve-



---

ments et son comportement : avec le grossissement des vagues va l'augmentation de l'amplitude des mouvements ; l'angle de rencontre des vagues change la période de ses mouvements. Mais d'autres paramètres rentrent aussi en jeu : la vitesse du navire par rapport à l'eau, son chargement (consommation du carburant, déplacement des passagers, ...).

Les lois de commande généralement utilisées pour la stabilisation des navires en roulis à partir de surfaces portantes sont paramétrées en fonction de la vitesse du navire sur l'eau (par intervalles ou de façon continue) : elles intègrent donc les modifications du comportement du navire en fonction de sa vitesse par rapport à l'eau. Par contre, elles ne tiennent en grande majorité pas compte des informations de changement de l'environnement et des effets sur la mécanique du navire ; celles qui en tiennent compte nécessitent une action manuelle de l'équipage pour le réglage. Les mesures ont longtemps été impossibles, mais sont maintenant proches d'être disponibles : il existe des recherches dans ce domaine, visant à déterminer les conditions de mer (spectre de la houle, direction relative des vagues,...) à partir de mesures effectuées à bord du navire. On citera en particulier l'usage d'une cartographie radar de la surface de la mer pour en déterminer les caractéristiques, et l'usage de la mesure des mouvements du navire pour déterminer à partir des spectres des mouvements, les caractéristiques de la houle.

L'utilisation de mesures de l'environnement doit permettre une amélioration des caractéristiques du navire stabilisé, par rapport aux lois de commande actuelles. Pourtant, peu de références ou d'études font à l'heure actuelle mention de telles utilisations : c'est un problème ouvert dans le domaine.

La problématique de notre travail découle directement du constat précédent : y-a t-il un réel intérêt à s'adapter aux variations de l'environnement ? Et la question corollaire : si on décide de s'adapter à l'environnement, comment le faire ? Avant toute chose, il est nécessaire de fixer le cadre de travail du développement des lois de commande, pour en fixer les objectifs et les contraintes principales : nous utiliserons des lois de commande multivariables, pour asservir le cap à une valeur donnée, et en même temps stabiliser les mouvements de roulis<sup>1</sup>. Les lois de commande utilisées seront de type PID et  $H_\infty$ , nous en justifierons l'emploi plus tard. Pour comparaison, notons que beaucoup du systèmes en fonction actuellement sont monovariables, n'utilisent comme mesure que le roulis, et n'ont comme objectif que la stabilisation du roulis.

---

1 Il serait également possible, dans ce cadre, de rajouter des objectifs de commande sur l'embarquée et le lacet.

---

Ce cadre fixé, intéressons-nous à l'organisation de ce mémoire. Nous avons organisé notre travail en trois axes successifs, afin d'apporter une réponse à la problématique d'adaptation à l'environnement.

Avant de parler de lois de commande et de leur réglage, nous nous sommes attaché à écrire, de façon rigoureuse et néanmoins accessible, la modélisation de la dynamique du navire en roulis sur la houle. Après avoir décrit les différentes possibilités d'analyse de la houle, et présenté une description mathématique simple, nous donnons une méthode de simulation temporelle de la surface de la mer en un point donné (partie A – chapitre II). Puis, partant des équations de la mécanique du navire (partie A – chapitre III), nous présentons les différentes étapes conduisant au modèle dynamique final (partie A – chapitre IV) du navire sur la houle possédant des ailerons de stabilisation et des gouvernails. Nous nous sommes attachés ici à souligner à chaque étape de la construction du modèle, les simplifications nécessaires à l'établissement d'un modèle utilisable pour la synthèse des lois de commande.

Dans l'optique de l'adaptation aux conditions de l'environnement, nous avons mis en évidence (partie B – chapitre I) les différents paramètres qui interviennent de manière importante dans l'évolution du comportement du navire : l'angle de rencontre des vagues<sup>2</sup>, l'état de mer (monodirectionnel) défini par la donnée de la hauteur moyenne des vagues et la pulsation principale du spectre de houle, et la vitesse par rapport à l'eau. La masse du navire, et son chargement, ont été considérés constants durant son évolution sur l'eau. Nous définissons donc des points de fonctionnement, correspondant à une combinaison d'un état de mer, d'un angle de rencontre et d'une vitesse donnée sur l'eau. Il faut répondre à cette question : comment construire des lois de commande adaptées à un point de fonctionnement ? En l'absence de méthodologie générale répondant à notre problème, nous avons défini une méthodologie de commande (partie B – chapitre II), basée sur l'écriture naturelle du problème de synthèse des lois de commande, à partir d'un cahier des charges précis, comme un problème d'optimisation multi-objectifs, résolu avec des méthodes adaptées : par exemple un algorithme génétique. Deux publications jalonnent les étapes de notre raisonnement :

- notre première approche du sujet, et de la commande en roulis<sup>3</sup>, à la conférence CIFA, tenue à Nantes en juillet 2002 ; cet article a fait l'objet d'une publication dans la revue<sup>4</sup> JESA (Journal Européen des Systèmes Automatisés) en 2003.

---

<sup>2</sup> Ou bien gisement.

<sup>3</sup> [52]

<sup>4</sup> [53]

- 
- l'exposé de notre méthodologie<sup>5</sup> et son application au réglage de correcteurs PID et  $H_\infty$ , à la conférence MCMC, tenue à Gérone (Espagne) en septembre 2003.

Cette méthodologie a été appliquée à deux types de correcteurs : PID et  $H_\infty$ , pour valider l'intérêt de l'adaptation aux paramètres définissant l'environnement du navire. Nous avons donc défini un ensemble de points de fonctionnement importants, auxquels nous avons optimisé des correcteurs, dont nous comparons les performances. L'objectif est double : valider notre méthodologie de commande et son application, et comparer les performances des régulateurs entre eux pour déterminer l'intérêt de leur adaptation aux conditions de l'environnement. Nous verrons que l'intérêt de l'adaptation aux paramètres que nous avons choisis apparaîtra clairement.

Mais une fois constaté l'intérêt de s'y adapter, comment tenir compte des variations des paramètres ? La réponse naturelle est l'utilisation d'une technique de séquençement de gain ou programmation de gain. La technique classique dans le domaine est de faire des calculs de correcteurs à des points de fonctionnement donnés, puis de les interpoler en fonction des paramètres disponibles afin d'obtenir un correcteur s'adaptant aux variations des paramètres. Cette solution, si elle est utilisée souvent en pratique, n'est pas théoriquement valable : elle est basée sur l'hypothèse d'une variation quasi-statique des paramètres, et il n'est pas certain que les variations même lentes des paramètres ne déstabilisent pas le système. Des techniques récentes, basées sur l'utilisation des LMI permettent de lever cette difficulté ; elles sont basées sur l'utilisation de modèles de synthèse particuliers (LFT, polytopique).

Leur application pour l'adaptation en fonction de l'environnement est étudiée au chapitre III, partie B. Après avoir rappelé l'existence de plusieurs types de modèles linéaires à paramètres variants (paragraphe III.1), nous présentons (paragraphe III.2) les théorèmes permettant de faire la synthèse de correcteurs variants de type  $H_\infty$ , qui garantissent à la fois la stabilité de la boucle fermée et des performances acceptables par le respect de gabarits donnés.

En première approche (paragraphe III.3), nous avons considéré deux paramètres qui sont la vitesse du navire sur l'eau et un paramètre de réglage de la qualité de la commande que nous justifierons. Nous détaillerons ensuite les étapes qui conduisent à la synthèse du correcteur. Nous évaluons ensuite les performances obtenues en boucle fermée en simulation au paragraphe III.4, en montrant les intérêts et les limites de notre approche.

---

<sup>5</sup> [57]

---

Enfin, nous rappellerons dans la conclusion les objectifs qui étaient les nôtres au départ de ce travail. Nous terminerons ce mémoire en donnant des conclusions et perspectives.

---

## Publications

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse ont fait l'objet de plusieurs publications dont nous sommes coauteurs.

### ***Publication en revue***

[53] Hervé Tanguy, Guy Lebre, Stabilisation en Roulis d'un Navire de Type Frégate, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, éd. HERMÈS, Vol. 37/2, pages 285-300, 2003. Texte identique à [52].

### ***Publications en congrès internationaux avec comité de lecture et actes***

[52] Hervé Tanguy, Guy Lebre, Stabilisation en Roulis d'un Navire de Type Frégate, *2ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2002)*, Nantes, France, pages : 853-858, Juin 2002.

[57] Hervé Tanguy, Guy Lebre, Olivier Doucy, Multi-Objective optimisation of PID and  $H_\infty$  Fin/Rudder roll controller, *6th IFAC Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft (MCMC03)*, Gérone, Espagne, Sept. 2003.

[54] Hervé Tanguy, Guy Lebre, Fin/Rudder Roll Stabilisation of Ships: a Gain Scheduling Control Methodology, *accepté pour ACC 2004, Boston, USA*. Juillet 2004.

### ***En cours d'évaluation***

[55] Hervé Tanguy, Guy Lebre, A Gain Scheduled Control Law for Fin/Rudder Roll Stabilisation of Ships, *soumis pour CAMS 2004, Ancône, Italie*. Juillet 2004.

## **Partie A Modélisation**



## ***Chapitre I Introduction***

Le domaine général de notre étude est celui de la commande des mouvements d'un navire. Nous nous intéressons plus particulièrement au problème de l'atténuation des mouvements de roulis. Pour cela, il nous faut bien entendu un modèle de comportement du navire évoluant dans son environnement.

Toute personne ayant embarqué sur un navire de grand gabarit (un car-ferry, par exemple) aura senti les mouvements d'ensemble du navire : roulis, tangage ... mais aura sûrement aussi senti ou vu les déformations de sa structure. Notre étude ne concerne que les mouvements d'ensemble, et en ce sens, il est inutile de considérer le navire comme souple.

Nous supposons donc que le navire est un corps rigide, pour lequel la dynamique sera régie par le théorème fondamental de la mécanique : *le torseur dynamique d'un solide est égal au torseur des efforts qui lui sont appliqués*. Énoncé aussi rapidement, le problème semble simple. Il faut bien entendu faire attention de ne l'appliquer que dans un repère galiléen. Précautions prises, évaluer le torseur dynamique se fait alors sans problème.

En fait, les véritables complications surviennent lorsque l'on fait le recensement des forces qui s'appliquent sur le navire : celles liées à l'environnement du navire (la houle, les courants, le vent), mais aussi celles engendrées par les propres actionneurs du navire.

Toutes ces forces ne sont pas utiles dans le calcul de la dynamique: elles n'ont pas toutes la même influence. Cela peut se comprendre par le raisonnement suivant: le mouvement de roulis pour un navire est faiblement énergétique, c'est à dire qu'une force faible peut provoquer un mouvement important, en perturbation comme en stabilisation. Pour faire une analogie avec un système dynamique du second ordre, le roulis est un mouvement résonnant. Nous n'avons considéré que les efforts excitant les navires dans la gamme de fréquence correspondant à leur résonance. Bien sûr, chaque navire a sa propre fréquence de résonance, mais de manière générale, elle est située entre 0,07 Hz et 0,02Hz.

Nous avons donc gardé les efforts « haute fréquence » de la houle à l'exclusion de toutes les autres forces: le vent, les effets du courant, les effets de dérive basse fréquence dus à la houle.

Pour obtenir finalement un modèle convenable pour l'automatique, des hypothèses simplificatrices sont nécessaires : hypothèse de route rectiligne, des petits mouvements... Malgré toutes ces simplifications, le modèle dynamique est cohérent avec la réalité, et utilisable pour la synthèse de lois de commande.



## ***1.1 Contribution***

Nous venons de brosser rapidement l'objet de cette partie du présent mémoire. Il faut savoir que dans le domaine de la modélisation du comportement d'un navire et des forces agissant sur lui, de nombreux ouvrages et études existent. Leur degré de complexité peut être très élevé, basé sur l'étude de l'hydrodynamique ([59]), mais inexploitable du point de vue de l'automatique. Ils peuvent être, au contraire, simplifiés à l'extrême, mais ne pas rendre compte de certains phénomènes comme les couplages entre mouvements, ou bien négliger l'effet du vent.

Notre contribution dans cette première partie sur la modélisation, sera de fournir un modèle pour l'étude des mouvements en roulis, acceptable du point de vue de la description de la dynamique du navire, comme du point de vue de la commande. Cela implique de marier deux disciplines ; il faut, pour l'hydrodynamicien, faire des hypothèses valables physiquement, et pour l'automaticien que ce modèle soit utilisable pour les techniques actuelles de commande.

## ***1.2 Plan de cette partie***

C'est l'environnement du navire qui est au cœur même des problèmes de modélisation de ses mouvements. Aussi lui consacrons-nous le deuxième chapitre (page 15). Plus particulièrement, nous focaliserons notre attention sur la description de la houle et son analyse par l'intermédiaire de la notion d'état de mer et le calcul d'informations statistiques. Nous donnerons une importance égale à la description d'une approche de la modélisation théorique de la houle. Elle permet en effet de simuler la houle dans le domaine temporel, ce qui constitue un élément important dans l'évaluation des performances des lois de commande.

Le troisième chapitre (page 27) sera consacré à la description de la dynamique du navire sur la houle. Concrètement, nous appliquerons les principes de la mécanique, après avoir pris soin de définir tous les repères nécessaires à leur application correcte. Nous y détaillerons ensuite l'ensemble des forces extérieures au navire – efforts hydrostatiques (forces d'Archimède), efforts hydrodynamiques – à l'exception des efforts de dérive. Nous ferons une première étape dans la construction du modèle, afin de mettre en évidence sa dépendance de certains paramètres représentatifs de l'état de mer, et la nécessité de certaines simplifications en vue de la synthèse de lois de commande.

Le deuxième paragraphe du chapitre trois (page 44) sera dédié à la description des efforts de commande fournis par une paire d'ailerons de stabilisation ou de gouvernails. Ces relations feront

apparaître les variables qui permettront de commander le système, ainsi que la dépendance de ces efforts dans la vitesse par rapport à l'eau.

Le dernier chapitre (page 51) de cette première partie sera très court : il permettra de faire un bilan complet du modèle retenu en rappelant les hypothèses de validité.



## **Chapitre II L'environnement – la houle**

Comme mentionné précédemment, nous ne considérons dans la suite que les efforts de « haute fréquence » liés à la houle. Avant de décrire au chapitre III les effets de la houle sur le navire, nous commençons par exposer comment se comporte le fluide lui-même.

Les éléments de théorie présentés ici sont simples ; il est évident que la description fine de la houle dépasse de beaucoup le cadre de ce mémoire. De plus, une connaissance très précise du comportement dynamique de l'eau devient rapidement aussi très complexe, et ne permet pas d'apporter simplement de la précision dans la connaissance du comportement du navire. Aussi ne donnerons-nous qu'une vue d'ensemble de la modélisation de la houle pour permettre la compréhension des forces agissant sur le navire

Ces descriptions et calculs hydrodynamiques sont classiques. Quelques ouvrages de référence sur la modélisation de la houle sont : [44], [37], [30], [12], [42].

### **II.1 Description de la houle**

Pour commencer, voici la définition du dictionnaire Petit Larousse 1994 :

« Houle n.f. (germ. hol : *creux*). Mouvement ondulatoire de la mer, sans déferlement des vagues. »

La réalité est en fait un peu plus complexe, mais cette définition retient l'essentiel. Le mouvement de la surface de l'eau constitue le phénomène le plus important quand on veut représenter la houle : c'est la partie visible et mesurable pour un œil humain autant que pour un « œil » électronique ; il permet de calculer les efforts subis par le navire. Mais ça n'est pas tout : les mouvements des particules du fluide, s'il sont apparents en surface, existent aussi dans tout l'espace où le fluide est présent, même si leur amplitude décroît très rapidement avec la profondeur.

C'est aussi par la surface que se forme la houle : le phénomène qui génère la houle est l'action du vent sur l'eau : lorsqu'il souffle sur une zone étendue (appelée le *fetch*) pendant longtemps, il se forme à la surface de la mer des rides, puis des vagues, qui se propagent. D'abord de faible longueur d'onde, donc de fréquence assez élevée, les vagues deviennent plus régulières au fur et à mesure du temps et de leur propagation. Une fois le vent tombé, ou lorsqu'elles sont sorties de la zone d'action du vent, les vagues ont une longueur d'onde plus longue, de l'ordre de 100 à 200 mètres ; le signal de la hauteur de la surface en un point est assez régulier (mais néanmoins pas sinusoïdal) : la houle est formée.

## ***II.2 Notion d'état de mer***

Les navires – et généralement les structures, par exemple des plates formes pétrolières – subissent des efforts dus à la houle variant dans le temps. Deux échelles de temps caractérisent ces efforts : une période courte, de l'ordre de quelques secondes, qui correspond à la succession des vagues, aux variations mécaniques de la surface de la mer ; et une période plus longue, de l'ordre de quelques dizaines de minutes, qui correspond aux changements des caractéristiques moyennes des vagues.

Il y a donc deux échelles de temps possibles pour l'analyse des signaux, et toutes deux ont leur intérêt. On peut premièrement étudier les caractéristiques statistiques des vagues pendant une durée pour laquelle on estime qu'elles ne changent pas (entre 20 minutes et 3 heures). Cette analyse permettra de déterminer l'état de la mer, que l'on range dans une classification (voir [44], [23]) : mer calme, belle, peu agitée, agitée, forte, grosse... Sans connaître la forme exacte de la mer, on a alors une idée de la hauteur des vagues et de leur période, ce qui permet de décider de sortir en mer ou pas ou d'éviter une zone trop agitée.

La deuxième analyse possible étudie les évolutions sur une plus longue période des grandeurs calculées précédemment. Elle permet de répondre aux questions suivantes : quelles sont les variations à l'échelle du mois, de l'année, de la décennie, des états de mer ? Quelle est la probabilité, mi novembre, dans le golfe de Gascogne de trouver une mer belle<sup>6</sup> ?

Nous nous intéressons essentiellement ici à la première analyse : elle permet (voir le paragraphe II.5) de simuler les efforts dus à la houle dans le domaine temporel.

Pour pouvoir mener l'analyse de la houle, il faut posséder des mesures. À cette fin, on enregistre l'élévation de surface de la mer en un point fixe (par une bouée). Le signal est ensuite analysé dans le domaine temporel ou décomposé par transformée ou série de Fourier (analyse spectrale). Ces caractéristiques définissent l'état de mer. Du spectre ou de l'analyse statistique, on déduit des propriétés importantes : période moyenne des vagues, hauteur significative, fréquence de dépassement d'un seuil (paragraphe II.2.b).

Les caractéristiques statistiques des vagues peuvent être bien comprises en considérant une représentation temporelle de la hauteur de l'eau en un point fixe (figure A.1). Ces données peuvent être mesurées. On décrira les vagues par leur amplitude de crête à creux ( $H_i$ ) ou par l'amplitude simple  $\xi_i$  (voir figure A.1). La période d'une vague est repérée entre deux passages par zéro ( $T_i$ ).

---

6 La réponse est : « très faible »...

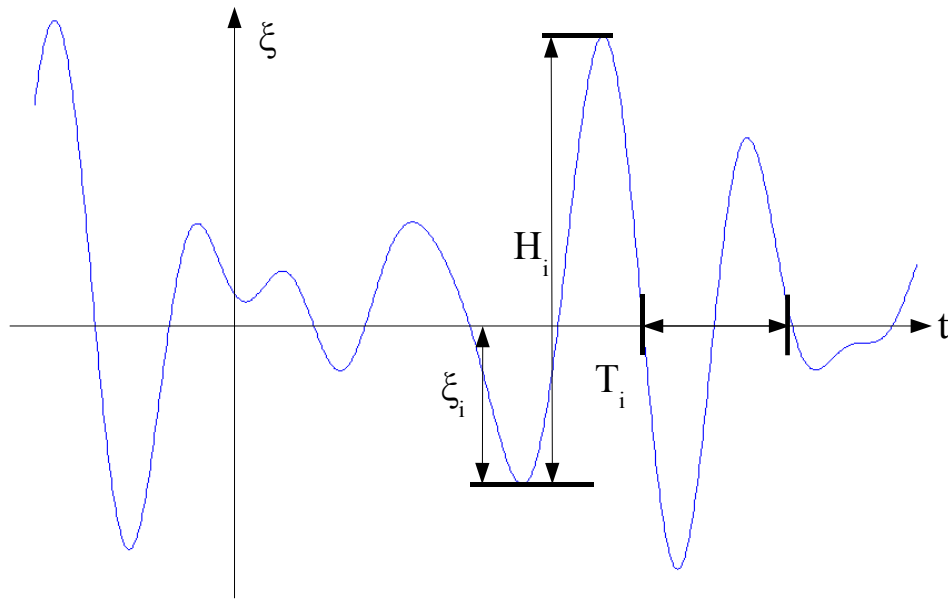


Figure A.1 Grandeurs d'analyse d'un état de mer

Ces grandeurs sont variables d'une vague à l'autre. L'analyse statistique permet d'en tirer des grandeurs caractéristiques de l'état de mer :

- période moyenne de passage par zéro :  $T_z$
- hauteur moyenne du tiers des plus hautes vagues (crête à creux) :  $H_{1/3}$

La hauteur moyenne des vagues perçue par l'équipage est notée hauteur significative  $H_s$ . Elle est assimilée dans la suite à la hauteur  $H_{1/3}$ . Et c'est aussi ce qui justifie de travailler sur le tiers des plus hautes vagues et non pas le dixième ou le cinquième.

L'analyse temporelle des signaux de houle permet donc de connaître les caractéristiques principales de l'état de mer. Il est également possible de tirer ces renseignements de l'étude spectrale du signal de hauteur de l'eau.

### II.2.a Spectre d'état de mer

Le signal de houle en un point est noté  $\xi(t)$ . Nous supposons qu'il a une moyenne nulle, et que le processus aléatoire associé est stationnaire. Sa fonction d'autocorrélation  $R_{\xi\xi}$  est définie par (A.1). L'hypothèse ergodique permet de faire ce calcul dans le domaine temporel, sur un intervalle de temps donné. La densité spectrale de puissance associée est donnée dans (A.2).

$$R_{\xi\xi}(t, \tau) = \mathbf{E}[\xi(t)\xi(t+\tau)] \quad (\text{A.1})$$

$$G_{\xi\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{A.2})$$

Nous utiliserons plus habituellement la densité spectrale de puissance monolatérale  $S_{\xi\xi}$ , usuellement dénommée spectre de houle ou d'état de mer, et définie par (A.3). On définit la période de pic du spectre  $T_p$  par la période pour laquelle le spectre  $S_{\xi\xi}$  possède son maximum, et  $\omega_p$  la pulsation correspondante.

$$\begin{cases} S_{\xi\xi}(\omega) = 2 G_{\xi\xi}, & \text{si } \omega \geq 0 \\ S_{\xi\xi}(\omega) = 0, & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Des formulations classiques des spectres de houle sont celles de Bretschneider et de Pierson-Moskowitz. Leur expression générale est basée sur (A.4), avec les valeurs données dans la table A.1. Ces spectres sont basés l'un sur la description du spectre de houle par la donnée de la pulsation de pic  $\omega_p$  et de la hauteur significative  $H_s$ , et l'autre sur le calcul de ces mêmes grandeurs à partir de la vitesse du vent à environ 20 mètres au dessus de la mer ( $V_{20}$ ). On notera  $g$  l'accélération de la pesanteur.

$$S_{\xi\xi}(\omega) = \frac{A}{\omega^5} \exp\left(\frac{-B}{\omega^4}\right) \quad (\text{A.4})$$

Nom du spectre	$A$	$B$
Bretschneider	$0,3125\omega_p^4 H_s^2$	$1,25\omega_p^4$
Pierson-Moskowitz	$8,1 \cdot 10^{-3} g^2$	$0,74(g/V_{20})^4$
Pierson-Moskowitz Modifié	$\frac{4\pi^3 H_s^2}{T_z^4}$	$\frac{16\pi^3}{T_z^4}$

Table A.1 Paramètres du spectre d'état de mer

Nous ne considérons dans la suite de ce mémoire que le spectre de Pierson-Moskowitz modifié (MPM), défini comme référence par l'ISSC et l'ITTC<sup>7</sup>.

Pour donner une vision d'ensemble, citons que d'autres spectres servent à la description d'états de mer localisés (par exemple la mer du Nord), ou à des états de mer en cours de formation, comme le spectre JONSWAP ([42], [23]) ou d'Ochi. Ils possèdent des paramètres permettant d'a-

---

<sup>7</sup> International Ship and Offshore Structure Congress et International Towing Tank Conference.

juster la dispersion fréquentielle et de concentrer, comme pour la houle qui se forme après une tempête, l'énergie dans une bande fréquentielle restreinte. Nous ne les avons pas utilisés par la suite.

Les spectres décrits précédemment ne contiennent pas toutes les informations concernant la houle : il faut rajouter les informations sur sa direction de propagation. En effet, si la houle se déplace dans une direction donnée, il s'agit toujours d'une direction moyenne : la puissance du spectre est toujours dispersée autour de cette direction de propagation moyenne. On adjoint donc à la formule du spectre de houle un coefficient de proportionnalité  $D(\psi)$  qui introduit la répartition de direction :

$$S_{\xi\xi d}(\omega, \psi) = S_{\xi\xi}(\omega) D(\psi) \quad (\text{A.5})$$

On utilisera typiquement pour  $D(\psi)$  une formulation du type de (A.6), où le coefficient  $C(s)$  normalise la répartition de l'énergie. Le coefficient  $s$ , entier positif, dénote la concentration du spectre au niveau de sa direction principale : plus il est élevé, et plus le spectre réparti est proche d'un spectre mono-directionnel. Cette expression est arbitraire : il est relativement difficile d'attribuer un coefficient de répartition  $s$  de façon systématique à un état de mer.

$$D(\psi) = C(s) \cos^{2s} \left( \frac{\psi - \psi_0}{2} \right) \quad (\text{A.6})$$

De plus, on trouve en pratique, et c'est le cas dans le golfe de Gascogne, toujours des superpositions de différentes houles de directions totalement différentes, dues à la propagation de la houle depuis un endroit parfois très éloigné où le vent a soufflé. Dans ce cas, on utilise pour le spectre de houle la superposition de plusieurs spectres élémentaires.

### ***II.2.b Analyse du spectre d'état de mer***

La donnée des spectres de houle est importante : on peut calculer les mêmes informations qu'à partir des signaux temporels.

Nous considérons dans la suite des houles peu cambrées. La cambrure  $\varepsilon$  est définie comme le rapport de la hauteur (crête à creux) des vagues  $H$  à la longueur d'onde  $\lambda$  :  $\varepsilon = H/\lambda$ . En supposant que la hauteur de la houle obéit à une loi gaussienne (ce qui est valide en pratique pour  $\varepsilon$  faible), nous pouvons calculer des informations plus précises, et relier les grandeurs  $T_z$  et  $H_{1/3}$  précédentes au spectre d'état de mer.



La puissance du signal est donné par  $R_{\xi\xi}(0)$ , ce qui dans le domaine spectral correspond, par transformée de Fourier inverse, à :

$$R_{\xi\xi}(0) = \int_0^{\infty} S_{\xi\xi}(\omega) d\omega \quad (\text{A.7})$$

En généralisant (A.7), on calculera les moments spectraux d'ordre  $n$  par (A.8). Les grandeurs statistiques de la houle en sont déduites. On remarquera que l'on a  $R_{\xi\xi}(0) = m_0$ .

$$m_n = \int_0^{\infty} \omega^n S_{\xi\xi}(\omega) d\omega \quad (\text{A.8})$$

Notamment, la fréquence moyenne de passage par un seuil avec dérivée positive  $e^+$  du signal de hauteur d'eau  $\xi$  peut s'exprimer sous la forme (A.9). En prenant le seuil égal à zéro, nous trouvons la période moyenne de passage par zéro  $T_z$  (A.10).

$$e^+(\xi_0) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{\frac{-\xi_0^2}{2m_0}} \quad (\text{A.9})$$

$$T_z = \frac{1}{e^+(0)} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (\text{A.10})$$

De plus, en supposant que le signal de hauteur de houle est à bande étroite (il y a peu de minima et de maxima locaux, entre deux passages par zéro), la densité de probabilité des maxima  $H$  suit une loi de Rayleigh :

$$p(H) = \frac{H}{4m_0} e^{-H^2/8m_0} \quad (\text{A.11})$$

Alors, la hauteur  $H_{1/3}$ , assimilée à la hauteur significative  $H_s$ , peut être approximée par la formule suivante :

$$H_{1/3} \simeq 4 \sqrt{m_0} \quad (\text{A.12})$$

### ***II.3 Approche mathématique de la houle régulière***

Les paragraphes précédents ont permis d'exposer des outils d'analyse de la houle à partir de son observation ou de la définition de son spectre. Nous donnons ici les développements mathématiques nécessaires à la description des efforts de roulis.

#### ***II.3.a Introduction***

Même si la partie visible de l'onde est la déformation de la surface de la mer, l'ensemble du fluide est en mouvement. De fait, le problème de la propagation de la houle est un problème global : le comportement du fluide est décrit par des variables dépendant du temps et de l'espace : pressions, vitesse, hauteur de la surface... Sous certaines hypothèses, toutes ces variables peuvent être déduites d'une seule grandeur appelée potentiel, qui obéit à des équations aux dérivées partielles. La particularité de ces équations, au delà de la difficulté à les résoudre, est d'avoir des solutions dépendant de conditions aux limites et de conditions initiales – notons que la carène du navire lui-même impose une condition aux limites...

#### ***II.3.b Formulation mathématique [42]***

Nous considérons un fluide parfait incompressible, en écoulement irrotationnel. Sous ces hypothèses, l'écoulement est dit potentiel, et les différentes caractéristiques du fluide – vitesses des particules d'eau, pression – dépendent uniquement d'une fonction des variables de temps et d'espace  $\Phi$ , appelée potentiel. De plus nous faisons la supposition, sans perte de généralité dans notre cas, que l'écoulement est bidimensionnel, dans un plan vertical. Les variables spatiales concernées sont  $x$  et  $z$  (voir figure A.2): le potentiel est donc écrit  $\Phi(t,x,z)$ . Le fond est supposé horizontal et plat ; sa profondeur est notée  $-d$ .

Le champ des vitesses est lié au potentiel  $\Phi$  par la relation suivante :

$$V = \text{grad } \Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (\text{A.13})$$

De la même façon, la pression en un point du fluide est donnée par la relation de Bernoulli-Lagrange :

$$p(t, x, z) = p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\nabla \Phi)^2 \quad (\text{A.14})$$

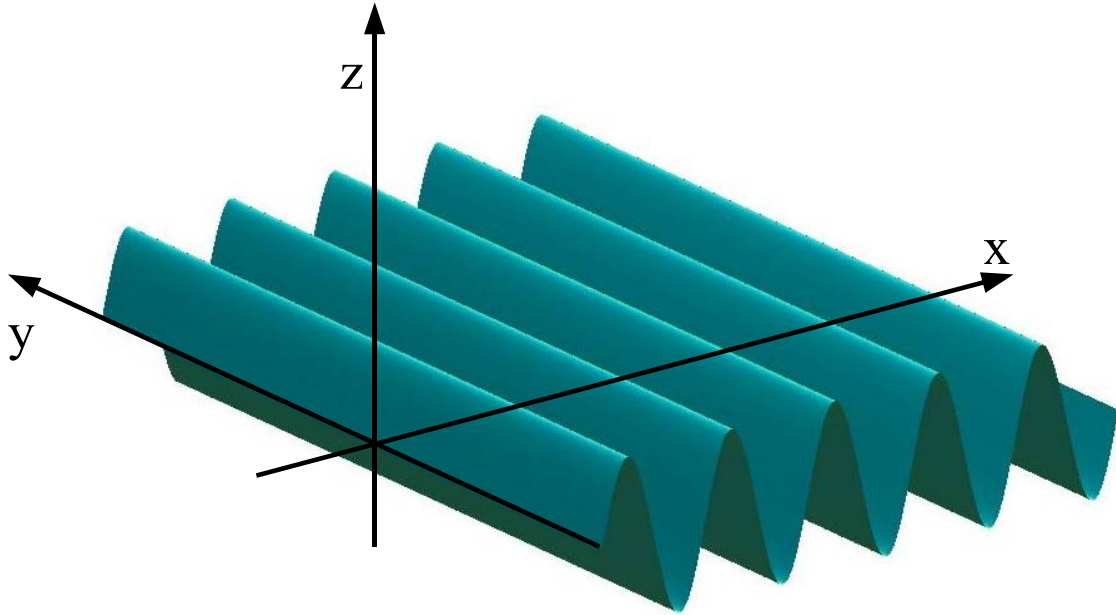


Figure A.2 Système de coordonnées utilisé dans la description de la houle

La fonction  $\Phi$  est solution de l'équation différentielle (A.15), appelée équation de Laplace, qui traduit les propriétés d'incompressibilité du fluide.

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.15})$$

(A.15) seule n'est pas suffisante pour définir le problème. Il faut rajouter des conditions aux limites, qui traduisent les contraintes (physiques) que l'on impose aux solutions mathématiques :

- Le fond est imperméable, donc la vitesse verticale en ce point est nulle :  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-d} = 0$  ,
- La pression à la surface est égale à la pression atmosphérique :  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \Phi)^2 + g z = 0$  où  $z = \xi$  (condition dynamique de surface libre).
- Les particules de la surface libre restent à la surface :  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  (condition cinématique de surface libre)

La difficulté majeure de la résolution de ces équations est que les conditions aux limites à la surface sont inconnues *a priori*. La forme de la surface dépend elle-même de l'état du fluide dans tout l'espace.

### II.3.c Solutions du problème linéarisé

Pour simplifier les équations précédentes, nous supposons (voir [42]) que le rapport  $\varepsilon$  entre la hauteur  $H$  d'une vague (de la crête au creux) et sa longueur d'onde  $\lambda$  – la cambrure – est faible. On obtient alors des conditions aux limites linéarisées.

Nous rajoutons une hypothèse : le potentiel est périodique en temps (pulsation  $\omega$ ) et en espace (suivant la direction de propagation  $x$  avec une longueur d'onde  $\lambda$ ). Nous supposons ainsi qu'une solution s'écrit sous la forme (A.16), où l'on a séparé les variables spatiales et temporelle.

$$\Phi(t, x, z) = f(z) g(x) \sin(\omega t) \quad (\text{A.16})$$

Les autres équations permettent de déterminer la solution suivante :

$$\Phi(x, z, t) = \frac{a g}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh k d} \sin(k x - \omega t) \quad (\text{A.17})$$

Et l'expression de l'élévation de surface libre est donnée par (A.18), où  $a$  est l'amplitude simple du signal.

$$\xi(x, t) = a \cos(k x - \omega t) \quad (\text{A.18})$$

Le nombre d'onde  $k$  (lié à la longueur d'onde  $\lambda$  par la relation  $\lambda k = 2\pi$ ) et la pulsation  $\omega$  d'une onde sont liés par la relation de dispersion (A.19).

$$g k \tanh(k d) = \omega^2 \quad (\text{A.19})$$

La vitesse de propagation  $c$ , dite vitesse de phase, est définie par  $c = \omega/k$ . La relation de dispersion permet d'écrire (A.20).

$$c = \sqrt{2 \pi g \lambda \tanh\left(2 \pi \frac{d}{\lambda}\right)} \quad (\text{A.20})$$

L'élévation de surface libre en un point est caractérisée par la hauteur (de crête à creux) de la houle  $2a$ , une pulsation  $\omega$ , un nombre d'onde  $k$ , la profondeur du fond  $d$  et l'accélération de la gravité  $g$ .

Dès lors que la profondeur  $d$  est grande (en pratique, quand elle est supérieure à  $\lambda/2$ ), on supposera que l'on travaille à profondeur infinie. Cette supposition permet de simplifier encore les équations. L'équation du potentiel (A.17) et la relation de dispersion (A.19) sont alors simplifiées (A.21) et (A.22). La relation (A.18) reste identique.

$$\Phi(x, z, t) = \frac{a g}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad (\text{A.21})$$

$$g k = \omega^2 \quad (\text{A.22})$$

La vitesse de propagation (A.20) devient (A.23). Cette relation exprime que la vitesse de propagation des ondes est différente suivant leur longueur d'onde : les ondes longues se propagent plus vite que les ondes courtes.

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{2 \pi g \lambda} \quad (\text{A.23})$$

Dans un cadre plus général, on définira des ondes qui se propagent dans une direction quelconque  $\psi$ . Alors, le nombre d'onde  $k$  est remplacé par le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  :  $\mathbf{k} = k (\cos \psi ; \sin \psi)$ . Les positions sont repérées, non plus suivant l'axe des abscisses, mais dans le plan horizontal par :  $\boldsymbol{\eta} = (x ; y)$ . L'équation (A.18) est transformée en (A.24).

$$\xi(\boldsymbol{\eta}, t) = a \cos(\mathbf{k} \boldsymbol{\eta} - \omega t) \quad (\text{A.24})$$

Rappelons que pour pouvoir calculer une solution, nous avons simplifié les équations régissant le comportement du potentiel en supposant que la cambrure  $\varepsilon$  est très petite. Cette hypothèse est une limitation de l'approche. D'autres théories de description de la houle existent en effet, qui permettent une approche plus fine des phénomènes physiques. On citera notamment les modifications du potentiel linéaire pour tenir compte moins grossièrement des conditions de surface libre, et les développements des équations à un ordre plus élevé en  $\varepsilon$  (jusqu'au 5ème ordre), ou des théories particulières en eaux peu profondes (houle cnoïdale, onde solitaire). [42] constitue en particulier une référence française sur le sujet.

## II.4 Houle irrégulière

La houle réelle est irrégulière, et n'est jamais simplement monochromatique. On la représente comme la superposition d'un grand nombre d'ondes régulières élémentaires. La superposition est possible en raison du caractère linéaire des équations différentielles et des conditions aux limites utilisées. L'amplitude et la direction de chaque onde élémentaire sont définies par la donnée du spectre de puissance (A.4) ou (A.5) qui définit l'état de mer (dans le premier cas, il faut également définir la direction de propagation de la houle).

Ainsi, nous définissons un nombre  $N$  d'ondes élémentaires : de pulsation  $\omega_i = i\Delta\omega$ , de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$ , d'amplitude  $A_i$ . L'élévation de la surface de la mer en un endroit donné  $\boldsymbol{\eta}=(x,y)$  suit (A.25). La phase aléatoire  $\Phi_i$  permet la représentation temporelle de l'état de mer, dont on ne connaît que les caractéristiques statistiques. Les phases  $\Phi_i$  sont réparties uniformément entre 0 et  $2\pi$ . Le processus aléatoire ainsi défini est stationnaire, gaussien et à moyenne nulle. Si la profondeur du fond est connue, alors  $S_{\xi\xi}$  caractérise entièrement l'état de mer à court terme.

$$\xi(t, \boldsymbol{\eta}) \simeq \sum_{i=1}^{i=N} A_i \cos(\mathbf{k}_i \boldsymbol{\eta} - \omega_i t + \phi_i) \quad (\text{A.25})$$

Dans le cas d'un état de mer monodirectionnel, l'amplitude  $A_i$  est donnée par (A.26). Cette formulation permet de conserver la puissance du signal (A.25) proche de la puissance du spectre de départ  $S_{\xi\xi}$ .

$$A_i = \sqrt{2 \Delta \omega S_{\xi\xi}(\omega_i)} \quad (\text{A.26})$$

Dans le cas d'un spectre réparti, l'amplitude dépend aussi de la direction de propagation (et l'on doit faire la sommation en pulsation et en direction) :

$$A_{ij} = \sqrt{2 \Delta \omega \Delta \psi S_{\xi\xi d}(\omega_i, \psi_j)} \quad (\text{A.27})$$

## II.5 Simulation de la houle aléatoire

Le paragraphe précédent donne immédiatement une formulation simple pour simuler la propagation de la houle suivant un spectre d'état de mer donné. En fixant un nombre de directions de propagation (discrétisation en direction), de composantes par direction (discrétisation en fréquence),

nous obtenons un ensemble de couples  $(\omega_i, k_i)$  pour lesquels nous définissons une amplitude élémentaire à partir de (A.27).

La recombinaison du signal de houle (en tout point de l'espace), est effectuée par (A.25). Le caractère aléatoire provient du choix des phases de ces composantes, à partir d'une distribution uniforme entre 0 et  $2\pi$ .

Nous disposons donc de deux approches, très liées, dans les domaines temporel et fréquentiel. L'approche fréquentielle sera utilisée dans le réglage des correcteurs, et l'approche temporelle pour simuler le comportement du navire et évaluer les performances.

### ***Chapitre III Dynamique du navire sur la houle***

La dynamique du navire est avant tout celle d'un solide rigide. A partir du théorème fondamental de la dynamique, on peut tirer des équations différentielles relativement simples qui régissent son mouvement. Les choses se gâtent lorsqu'on calcule les efforts qui s'appliquent sur la carène. Suivant le but de l'étude, les forces considérées seront différentes, et le raffinement dans leur description plus ou moins poussé : le détail des forces d'Archimède n'a pas d'utilité dans l'étude de la régulation du cap. A l'inverse, elle est primordiale quand on s'intéresse à un sous-marin... La définition des objectifs finaux de l'étude est donc essentielle dans la façon de calculer le modèle. D'autant plus que son utilisation en commande impose que le modèle final soit utilisable pour la synthèse des lois de commande.

On distingue ici deux classes de problèmes dans l'étude de la dynamique des navires, suivant la vitesse d'évolution et les objectifs finaux de l'étude : manœuvrabilité et tenue à la mer. Dans le premier cas, on s'intéresse aux problèmes de comportement du navire dans le plan horizontal : le navire évolue sur un plan d'eau au repos, et l'on s'intéresse à ses qualités manœuvrières, pilotage automatique, suivi de route, accostage automatique, positionnement dynamique...

Pour la tenue à la mer, les aspects dynamiques dus aux manœuvres dans le plan horizontal deviennent secondaires : le navire n'évolue plus sur une mer au repos mais sur la houle, et on suppose en général que la direction et la vitesse du navire sont constantes. On ne cherche plus à maîtriser les mouvements du navire pour lui faire suivre une trajectoire donnée (variable ou bien fixe) mais à atténuer au maximum les mouvements dus à la houle. C'est ce problème qui nous intéressera dans la suite de ce mémoire.

Il est actuellement difficile de simuler un navire correctement dans toutes les situations de son évolution sur la mer, et c'est la raison de la distinction précédente. Le couplage des modèles de manœuvrabilité et de tenue à la mer apporte des difficultés théoriques qui se résument dans l'impossibilité d'écrire un modèle analytique. Ce problème est un sujet de recherche actuel en hydrodynamique.

Les paragraphes qui suivent présentent une modélisation classique en tenue à la mer, utilisable pour l'étude de la stabilisation du roulis, en mettant en relief les hypothèses nécessaires. La construction du modèle est orientée vers l'établissement d'une formulation simple et utilisable pour la synthèse de lois de commande.



### ***III.1 Mécanique du navire***

Dans la recherche d'une écriture rigoureuse de la dynamique du navire sur la houle, nous commençons par exposer les variables, grandeurs et valeurs utilisées dans les équations. Celles-ci n'ont de sens que dans un cadre précis, un repère ou un référentiel. Nous explicitons donc les repères (§III.1.a) utilisés dans l'écriture des équations de la mécanique (§III.1.b). Parmi les efforts qui s'exercent sur la carène, nous ne retiendrons que les efforts hydrodynamiques, à l'exception des efforts de dérive (§III.1.c). Nous donnerons enfin les modèles utilisés pour la simulation des mouvements de navires et la synthèse des lois de commande (§III.1.d).

#### ***III.1.a Repères de travail***

Les grandeurs qui servent à calculer et à interpréter les mouvements des navires sont les vitesses linéaires et angulaires. Elles n'ont de signification physique que relativement au navire et sont par la suite définies par rapport à des axes liés au navire. De la même façon, les efforts n'ont d'expression simple et utilisable que par rapport à la position et l'attitude instantanée du navire.

Pour comprendre l'évolution du navire, il faut donc exprimer ses mouvements dans un repère qui lui soit lié. On le nomme repère de manœuvrabilité<sup>8</sup>, et on le note  $R_m$ , d'origine  $G$ , le centre de gravité du navire et d'axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Il est décrit à la figure A.3 (navire avec axes et définition des mouvements).

Les noms des six différents mouvements, ou degrés de liberté dans ce repère sont donnés dans la table A.2. Les degrés de liberté correspondent à une "direction" qui peut être utilisée indépendamment des autres. Par exemple la direction  $X$  : cavalement, ou rotation autour de  $Y$  : tangage. Cette notion doit être distinguée, pour l'étude de la représentation des véhicules, de la notion d'état dans la représentation d'équations différentielles. Un état correspond à une seule grandeur : vitesse, position... Un degré de liberté correspond, lui, à une direction mécanique, ce qui en général, implique deux états : position et vitesse.

---

<sup>8</sup> pour des raisons historiques, ce repère ne fut pas utilisé dans le domaine de la tenue à la mer

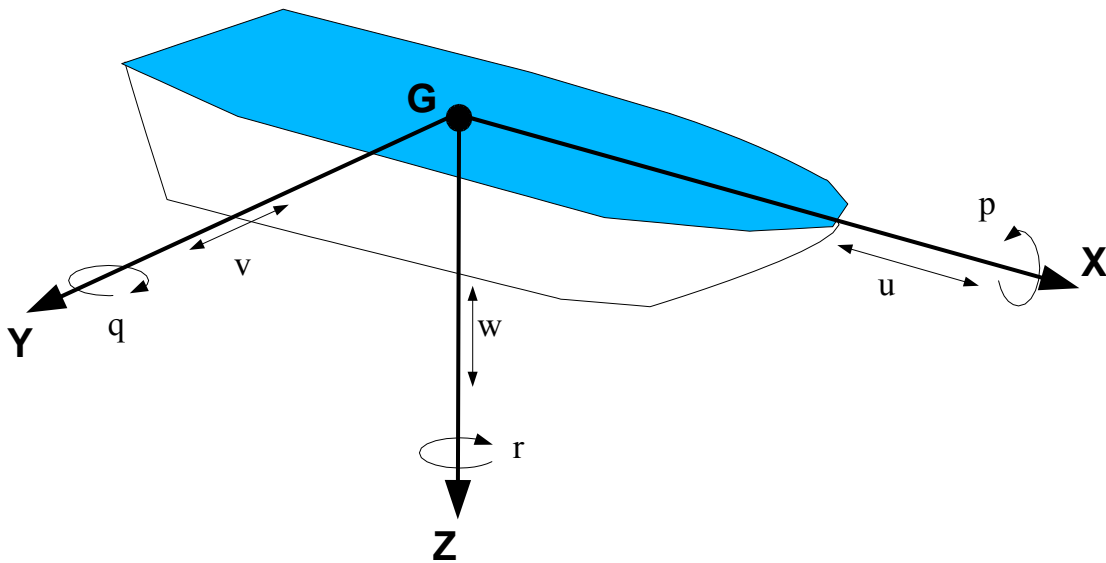


Figure A.3 Figure d'un navire avec ses degrés de liberté : voir table A.2

Le repère de manœuvrabilité n'est malheureusement pas galiléen. Il n'est donc pas possible d'y appliquer le théorème fondamental de la mécanique. De plus, l'orientation du navire ne peut être définie que par rapport à un repère fixe. Nous utilisons donc un autre repère, appelé repère géographique<sup>9</sup>, lié à un point physique (à la Terre), et dont les axes sont de direction fixée. Il est noté  $R_G$ . Ce repère n'est dans l'absolu pas un repère galiléen, car la Terre est en mouvement, mais dans notre application, les vitesses ne sont pas suffisantes pour tenir compte des effets des forces de Coriolis et centrifuge.

	Nom du mouvement	Nom anglais
$u$	Cavalement	<i>surge</i>
$v$	Embardée	<i>sway</i>
$w$	Pilonnement	<i>heave</i>
$p$	Roulis	<i>roll</i>
$q$	Tangage	<i>pitch</i>
$r$	Lacet	<i>yaw</i>

Table A.2 nom des degrés de liberté dans le repère de manœuvrabilité

Le passage du repère de manœuvrabilité au repère géographique est effectué par une translation des origines et une rotation des axes. La rotation est faite par l'intermédiaire des angles d'Euler.

---

<sup>9</sup> appelé aussi *NED* pour *North East Down*, soit Nord, Est, Bas.

ler<sup>10</sup> :  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ . La rotation correspondante est décrite à la figure (A.4). Les vitesses dans le repère géographique sont liées aux vitesses dans le repère de manœuvrabilité par (A.28). Les angles d'Euler sont liés aux vitesses de rotation angulaires par (A.29), voir [23].

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \phi \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

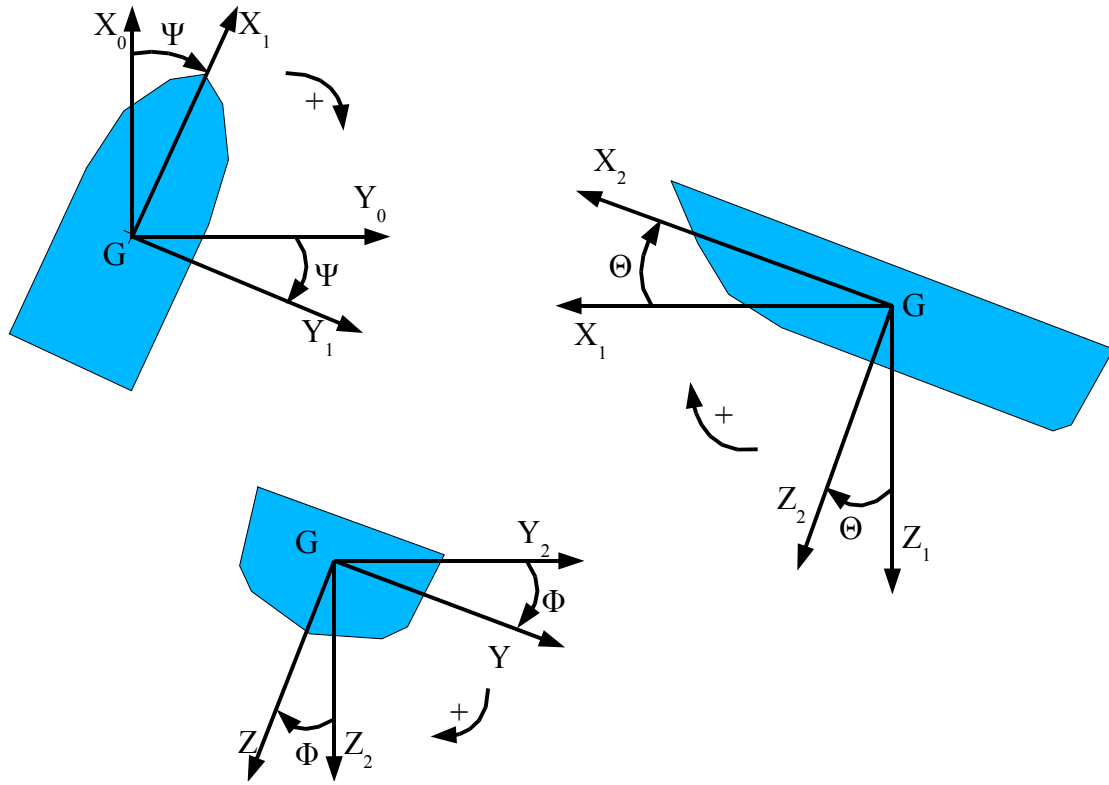


Figure A.4 Rotations successives des angles d'Euler

10 L'appellation « angle d'Euler » n'est pas tout à fait correcte, mais utilisée en pratique. Il faudrait pour être plus rigoureux utiliser le nom « d'angles de Cardan ».

Nom du mouvement	État statique	Nom anglais
$x$	<i>Non usité</i>	
$y$	<i>Non usité</i>	
$z$	Enfoncement	
$\phi$	Gîte	<i>Heel, List</i>
$\theta$	Assiette	<i>Trim</i>
$\psi$	Cap	<i>Heading</i>

Table A.3 nom des degrés de liberté dans le repère géographique

En toute rigueur, pour décrire la dynamique et les efforts du navire, nous devons utiliser douze variables :

- six pour les vitesses dans le repère de manœuvrabilité :  $u, v, w, p, q, r$  – respectivement les vitesses suivant les axes  $GX, GY$  et  $GZ$  du repère de manœuvrabilité, et les vitesses de rotation instantanée autour de ces mêmes axes. Elles permettent d’exprimer les accélérations (et de calculer la dynamique). Nous les regroupons dans un vecteur noté  $\mathbf{v} = [u \ v \ w \ p \ q \ r]$  .
- six pour la position géographique et l’attitude du navire dans le repère géographique :  $x, y, z, \phi, \theta, \psi$  – respectivement positions longitudinale et latérale dans le plan de référence, enfoncement du navire, et angles d’Euler. Elles servent à calculer les efforts. Nous les regroupons dans un vecteur noté  $\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]$  .

Nous disposons donc de deux repères qui suffisent pour écrire les équations de la mécanique au sens strict du terme. Cependant, le problème de la tenue à la mer est principalement contraint par l’expression possible des efforts hydrodynamiques : ceux-ci, nous le verrons au paragraphe III.1.c, demandent l’utilisation d’un repère supplémentaire, le repère de tenue à la mer<sup>11</sup>.

Nous ferons, dans ce paragraphe, usage de certaines hypothèses : les variables qui décrivent l’attitude du navire, à part sa position et la vitesse d’avance, sont faibles, et l’on ne s’intéresse qu’aux écarts à une position moyenne. De plus les axes sont dirigés suivant les directions moyennes du navire, autrement dit comme s’il était en route rectiligne sur une mer plate. Sous ces conditions, le repère de manoeuvrabilité prend le nom de repère de tenue à la mer. Le passage du repère de manoeuvrabilité, devenu de tenue à la mer, au repère géographique se simplifie puisqu’il ne tient plus

---

11 Les repères utilisés dans la pratique par les hydrodynamiciens œuvrant en tenue à la mer et en manœuvrabilité diffèrent : les premiers mettent leur axe  $z$  vers le haut, et conséquemment l’axe  $y$  vers bâbord ; les seconds mettent l’axe  $z$  vers le bas et l’axe  $y$  vers tribord. Aucune préférence n’étant justifiée, nous avons conservé l’habitude des auteurs de travailler dans le repère de manœuvrabilité.

compte que de l'orientation moyenne  $\psi_0$  du navire : les équations (A.28) et (A.29) sont simplifiées en (A.30) et (A.31).

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_0 & -\sin \psi_0 & 0 \\ \sin \psi_0 & \cos \psi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

Si l'on fait l'hypothèse – valide puisque le navire est en route rectiligne – que les repères géographiques et de tenue à la mer sont alignés, dans ce cas  $\psi_0 \approx 0$ , on peut résumer les équations précédentes par (A.32).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \quad (\text{A.32})$$

### **III.1.b Équation fondamentale de la mécanique**

L'établissement du modèle passe par l'application du principe fondamental de la mécanique à notre navire. Ce principe s'exprime de la façon suivante :

Dans un repère galiléen, la variation de quantité de mouvement d'un mobile rigide  $\mathbf{p}_G$  est proportionnelle aux efforts qui lui sont appliqués ; de même, la variation de quantité de rotation  $\mathbf{h}_G$  au centre de gravité est proportionnelle aux moments au centre de gravité qui lui sont appliqués. La traduction mathématique en est (A.33).

$$\begin{cases} \frac{d \mathbf{p}_G}{d t} = \Sigma \mathbf{F} \\ \frac{d \mathbf{h}_G}{d t} = \Sigma \mathbf{M} \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

Les notations et variables que nous utilisons sont liées au repère de manœuvrabilité qui n'est pas un repère galiléen. De la même façon, les efforts sont liés à la position et l'attitude instantanée du navire. Nous exprimons donc le principe fondamental de la mécanique par rapport au repère géographique, mais dans le système de coordonnées du repère de manœuvrabilité. Cette manipulation nécessite le calcul de l'accélération linéaire d'un point  $A$  qui n'est pas au centre de gravité  $G$  du navire, en fonction des accélérations et vitesses linéaires et de rotation, voir (A.34).

$$\Gamma_A = \Gamma_O + \Omega \wedge V_A + \dot{\Omega} \wedge \vec{OA} + \Omega \wedge (\Omega \wedge \vec{OA}) \quad (\text{A.34})$$

Sans rentrer dans tous les détails, (A.35) représente les équations d'évolution du navire en fonction des efforts appliqués. L'écriture matricielle des équations est devenue classique (voir [23], [1]).

$$M \dot{v} + C(v)v = \tau \quad (\text{A.35})$$

On fait en général l'hypothèse que l'on découple les problèmes de tenue à la mer des problèmes de manœuvrabilité : nous sortons donc du cadre de notre étude les problèmes liés au pilotage et à la propulsion du navire. Nous supposons de plus que le navire peut avoir un cap variable, mais lentement, ce qui en pratique signifie qu'on ne tient pas compte des effets dynamiques de la rotation. Finalement, le navire est en route rectiligne à vitesse constante.

Nous formulons l'hypothèse que les mouvements du navire autour de son état moyen sont faibles. Cette hypothèse est restrictive (mais assez largement valable en pratique) et elle intervient très tôt dans l'expression du modèle dynamique. Nous ne pouvons cependant en faire l'économie : l'écriture des efforts hydrodynamiques y fait appel. Ainsi, (A.35) devient (A.36), où les termes d'accélération centrifuge et de Coriolis ont été linéarisés.

$$M \dot{v} + C(v_0)v = \tau \quad (\text{A.36})$$

Il reste maintenant à décrire les efforts appliqués au navire. Ils sont de différentes natures : efforts hydrodynamiques, efforts de perturbation dus à la houle, au vent, aux courants, efforts de commande (propulsion, pilotage, stabilisation), efforts internes (ballotement de liquides, déplacements de masses). Les efforts internes au navire ne prennent pas en compte les contraintes de déformation, parce que nous supposons que le navire est rigide.

Nous ne considérerons ici que les efforts hydrodynamiques et de perturbation dus à la houle, que l'on regroupe dans le terme  $\tau_H$ . Le vent et les courants ont bien sûr un effet sur le navire, mais les phénomènes provoqués sortent du cadre de notre étude. L'expression des efforts de commande  $\tau_C$  (III.2) nous permettra de faire apparaître les variables de commande. Le modèle sera donc (A.37), avec  $v_0 = (U_0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ , où  $U_0$  est la vitesse moyenne du navire par rapport à l'eau.

$$M \dot{v} + C(v_0)v = \tau_H + \tau_C \quad (\text{A.37})$$

### III.1.c Description des efforts hydrodynamiques

Le chapitre II a donné des outils pour comprendre la propagation de la houle et ses caractéristiques, dans les domaines temporel et fréquentiel. Nous ne détaillons pas les calculs théoriques qui mènent au calcul des efforts hydrodynamiques sur la carène. Ils sont complexes, et sortent du cadre de ce mémoire. Nous donnons seulement les éléments nécessaires à leur compréhension et à la poursuite des calculs. Plusieurs théories existent suivant les degrés de raffinement apportés à la résolution des équations différentielles : les résultats présentés par la suite sont classiques et basés sur les propriétés de linéarité du problème, qui permettent de superposer différentes solutions des équations différentielles.

Les efforts hydrodynamiques  $\tau_H$  sur la carène se décomposent en trois parties (A.38) :

1. les efforts hydrostatiques  $\tau_A$  : ils sont provoqués par le volume d'eau déplacé (on dira aussi effort d'Archimède);
2. les efforts de rayonnement<sup>12</sup>  $\tau_R$  : le navire est en mouvement (sinusoïdal de pulsation  $\omega$ ) sur l'eau au repos, et il rayonne de l'énergie sous forme d'ondes;
3. les efforts de houle incidente et diffractée  $\tau_D$  : le navire est fixe sur la houle.

$$\tau_H = \tau_A + \tau_R + \tau_D \quad (\text{A.38})$$

Avant de détailler ces trois composantes, nous définissons la notion d'angle de rencontre.

#### III.1.c.1 Angle de rencontre

Comme le navire évolue sur la mer avec une vitesse et un cap donnés, la perception de la houle est modifiée par un effet analogue à l'effet Doppler. Les ondes se propagent à une vitesse donnée, et le navire peut dans certains cas les rattraper. Considérons un point  $P$ , de position donnée par le vecteur  $\boldsymbol{\eta} = [x(t) \ y(t)]$ , rencontrant une onde monochromatique de pulsation  $\omega$ , et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Alors, la hauteur de houle en ce point est définie par (A.39).

$$\xi(\boldsymbol{\eta}, t) = A \cos(\mathbf{k} \boldsymbol{\eta} - \omega t) \quad (\text{A.39})$$

Si on suppose que ce point  $P$  est mobile à la vitesse  $U_0$ , dans la direction donnée par le vecteur unitaire  $\mathbf{i}$  (on notera  $\mathbf{V} = U_0 \mathbf{i}$ ), sa position peut s'exprimer par (A.40).

<sup>12</sup> On utilisera plutôt l'anglicisme « radiation », seul terme utilisé dans la littérature en hydrodynamique.

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = t U_0 \mathbf{i} \quad (\text{A.40})$$

Alors, la phase  $\Phi = \mathbf{k} \boldsymbol{\eta} - \omega t$  dépend de la position  $\boldsymbol{\eta}$  du point  $P$  et de la pulsation  $\omega$ . Quand le point  $P$  se déplace, la phase varie à une pulsation différente de  $\omega$ . Cette pulsation dépend de la direction relative de déplacement de  $P$  par rapport à la direction de propagation de l'onde. On parle alors d'angle de rencontre, voir figure A.5 et l'équation (A.41) et de pulsation de rencontre, voir (A.42). Quand le navire rencontre la houle par l'avant,  $\psi_e$  vaut  $180^\circ$  et  $\omega_e = \omega(1 + \omega U_0/g)$  ; quand le navire « rencontre » la houle par l'arrière, l'angle de rencontre est  $0^\circ$ , et  $\omega_e = \omega(1 - \omega U_0/g)$ .  $\psi_e$  vaut  $90^\circ$  lorsque la houle vient de tribord, et alors  $\omega_e = \omega$ .

$$\psi_e = \psi - \psi_w \quad (\text{A.41})$$

$$\omega_e = \omega \left( 1 - \omega \frac{U_0}{g} \cos \psi_e \right) \quad (\text{A.42})$$

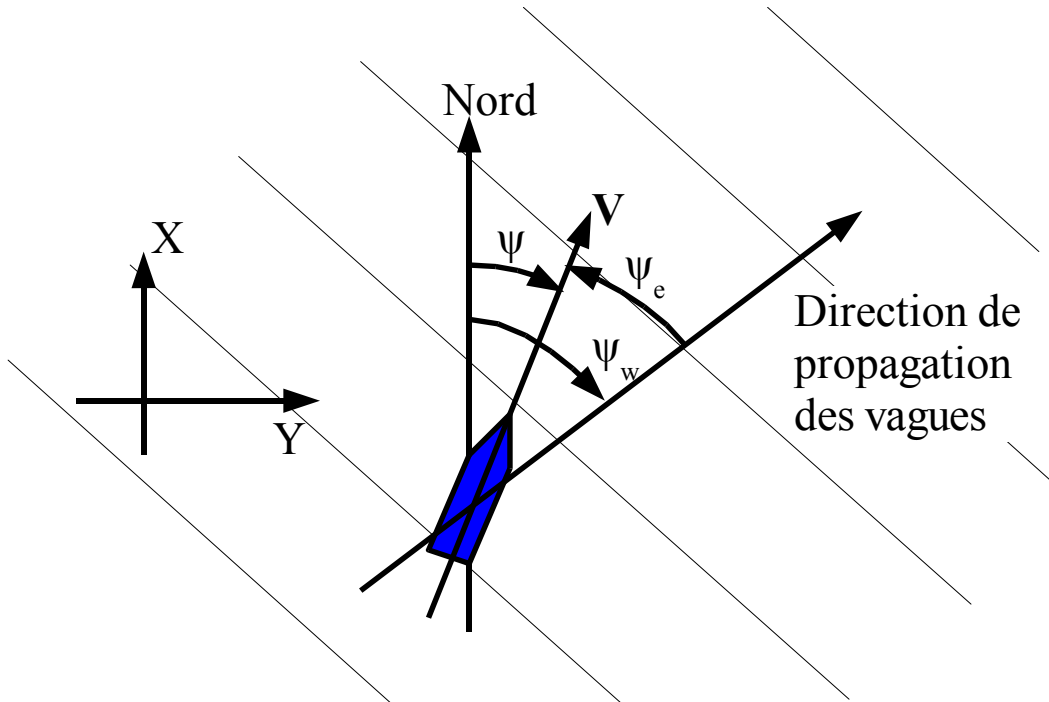


Figure A.5 Houle de rencontre



### III.1.c.2 Efforts hydrostatiques

Les efforts hydrostatiques, ou d'Archimède, sont évalués sur une mer au repos, car en présence de vagues, la variation des lignes d'eau le long de ma carène change la valeur de ces forces. Nous ferons donc l'hypothèse qu'elles dépendent uniquement de la position et de l'attitude du navire, ce qui constitue une limitation du modèle. Leur expression fait apparaître des composantes pour certains degrés de liberté : les mouvements de pilonnement, tangage et roulis ont un coefficient de rappel non nul.

Autrement dit, en l'absence de perturbation sur le navire, le navire a une position d'équilibre stable (qui dépend du chargement du navire) pour le roulis, le tangage et le pilonnement. Au contraire, les autres mouvements : cavalement, embardée, cap n'ont pas de position d'équilibre stable en position. On dira qu'ils ont une raideur nulle.

Nous raisonnons donc en variation de l'attitude du navire autour de sa position d'équilibre : la variation des efforts hydrostatiques dépend de la variation du volume immergé. Dans la plupart des cas, une approximation linéaire donne des résultats suffisants (voir [30], [37]) : on exprime alors la dépendance dans le vecteur d'état par la matrice de rappel de (A.43).

$$\tau_A = G x \quad (\text{A.43})$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 & g_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{53} & 0 & g_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Un couplage apparaît entre pilonnement et tangage (A.44), en raison de l'asymétrie avant/arrière du navire. Ces coefficients ont une expression analytique [23], qui dépend du volume de carène immergé  $W$ , de la surface du navire au niveau de la ligne de flottaison  $A_{wp}$ , de la masse volumique de l'eau  $\rho$  et de l'accélération de la gravité  $g$ .

- $g_{33} = \rho g A_{wp}$  ,
- $g_{35} = g_{53} = \rho g \iint_{A_{wp}} x dA$  ,
- $g_{44} = \rho g W \overline{GM}_T$  ,
- $g_{55} = \rho g W \overline{GM}_L$  .

Les coefficients  $\overline{GM}_T$  et  $\overline{GM}_L$  sont respectivement les rayons métacentriques latéral et longitudinal. Ils correspondent respectivement à la distance algébrique (si elle est positive, le navire est stable) entre la position suivant  $Gz$  du centre de gravité et du centre de rotation pour les mouvements de roulis et de tangage. Leurs valeurs dépendent de la forme de la carène et de la répartition spatiale des masses.

### **III.1.c.3 Efforts de rayonnement**

Les efforts de rayonnement correspondent aux efforts subis par le navire lorsqu'il est en mouvement sinusoïdal forcé à la pulsation  $\omega$ , de nouveau sur une mer calme. Une partie de l'énergie dépensée pour son mouvement est rayonnée : des ondes s'éloignent du navire.

Des codes de calcul dédiés permettent de calculer ces efforts, par exemple AQUA+, développé à l'École Centrale de Nantes : le navire est supposé en mouvement sinusoïdal suivant un degré de liberté d'amplitude unité à la pulsation  $\omega$  :  $x = \cos(\omega t)$  ; le code calcule les efforts appliqués sur la carène par ce mouvement forcé, supposés également sinusoïdaux. Ils sont décomposés en deux : des efforts proportionnels aux accélérations du navire, et d'autres proportionnels à la vitesse du navire (A.45). Les deux matrices sont respectivement appelées matrice d'inertie ajoutée, et matrice d'amortissement ajouté. Elles sont à coefficients réels, et donnent pour chaque mouvement l'amplification et le déphasage par rapport aux mouvements.

$$\tau_R(\omega) = -M_A(U_0, \omega)(-\omega^2) - D_A(U_0, \omega)\omega \quad (\text{A.45})$$

Cette relation définit en fait, pulsation à pulsation, une matrice de transfert (A.46), de taille 6x6, dépendant de la vitesse du navire sur l'eau.

$$\tau_R(s) = K_R(U_0, s)x(s) \quad (\text{A.46})$$

On remarquera que l'on obtient ici la relation entre les mouvements forcés et les efforts subis par le navire. L'expression temporelle de ces efforts passe par le calcul d'un noyau de convolution  $K_{RT}$  correspondant au transfert (A.46), qui permet de calculer les efforts en fonction de mouvements arbitraires, et non nécessairement sinusoïdaux. Il existe deux formulations différentes, équivalentes, données dans deux articles maintenant classiques : [16] et [59] - voir aussi [41] et [48]. Nous rappelons dans (A.47) la formulation de Cummins.

$$\tau_R(t) = -m_\infty \ddot{x} - \int_{-\infty}^t K_{RT}(U_0, t-\tau) \dot{x}(\tau) d\tau \quad (\text{A.47})$$

Ces efforts dépendent uniquement de l'historique des mouvements, de la vitesse sur l'eau, par le terme de convolution, et des caractéristiques du navire.

Ces efforts ne permettent pas de connaître exactement le comportement du navire : l'eau n'est pas un fluide parfait, et les effets de la viscosité et des lâchers de tourbillons ont une influence importante en roulis. Il faut rajouter en pratique un amortissement supplémentaire en roulis, qui est important par rapport à l'amortissement « potentiel », obtenu dans (A.45).

Pour donner une valeur à ce terme correctif, on passe par l'analogie mécanique suivante : les termes de masse (y-compris les masses ajoutées, voir A.45), d'amortissement et de rappel calculés dans ce paragraphe et le précédent sont analogues aux termes de masse, d'amortissement et de rappel d'un système mécanique composé d'une masse, d'un amortisseur, et d'un ressort (pour le terme de rappel). La position  $q$  de la masse obéit à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants (A.48).

$$m \ddot{q} + d \dot{q} + k q = F \quad (\text{A.48})$$

L'amortissement réduit  $z$  est donné par (A.49). Suivant sa valeur, le comportement de ce système mécanique sera différent. La valeur 1 est appelée amortissement critique parce qu'elle délimite deux comportements distincts : un comportement oscillatoire (présence de deux pôles complexes conjugués) et un comportement apériodique (deux pôles réels stables).

$$z = \frac{d}{2 \sqrt{k m}} \quad (\text{A.49})$$

Le roulis d'un navire est évidemment de nature oscillatoire, et stable. L'amortissement critique qu'on peut lui associer est donc positif mais inférieur à un. Pour tenir compte des efforts négligés par la théorie utilisée (lâchers de tourbillons, efforts visqueux), on fixe, suivant les navires et leur vitesse sur l'eau, l'amortissement en roulis à des valeurs entre 4 et 6% de l'amortissement critique. Le calcul est effectué par le code numérique et la modification intégrée au transfert  $K_R$ .

### **III.1.c.4 Efforts de houle diffractée et incidente**

Nous supposons maintenant le navire immobile sur une houle monochromatique. Il subit des efforts par les vagues incidences et par la diffraction du champ de vagues.

Comme pour les efforts de rayonnement, ces efforts sont calculés pulsation par pulsation : nous supposons donc que la houle est monochromatique et d'amplitude unité. Alors, nous déterminons l'amplification et le déphasage entre la hauteur de l'eau à l'endroit du navire et les efforts induits sur sa carène. Nous obtenons donc une fonction de transfert  $K_D(U_0, s)$ , entre la hauteur de l'eau à l'endroit du navire et les efforts appliqués. On nomme le noyau de convolution correspondant à cette fonction de transfert  $K_{DT}$  (A.50).

$$\tau_D = \int_{-\infty}^t K_{DT}(U_0, \psi_e, t - \tau) \xi(\tau) d\tau \quad (\text{A.50})$$

La fonction de transfert dépend de l'angle de rencontre de la houle  $\psi_e$  et de la vitesse du navire sur l'eau  $U_0$ . De plus, le signal temporel de hauteur de surface libre dépend de l'état de mer.

### **III.1.d Modèle dynamique**

Le modèle dynamique complet, tenant compte des efforts hydrodynamiques (A.43), (A.47) et (A.50) est donné par (A.51).

$$(M + m_\infty) \ddot{x} + \int_{-\infty}^t K_{RT}(U_0, t - \tau) \dot{x}(\tau) d\tau + C(U_0) \dot{x} + Gx = \tau_D + \tau_C \quad (\text{A.51})$$

Il a été construit de façon rigoureuse, mais pour un domaine de validité donné, comme nous le rappellerons au paragraphe III.1.d.2. S'il est rigoureux pour la simulation [48], il est cependant difficile d'utilisation pour la synthèse de lois de commande. De plus, le problème qui nous préoccupe ici est le roulis, et la forte résonance de ce degré de liberté rend superflue la finesse de la modélisation par les convolutions.

#### **III.1.d.1 Modèle simplifié**

On utilise en pratique un autre modèle (A.52) basée sur (A.45), avec  $\omega = \omega_0$  la pulsation de résonance en roulis du navire, et non sur (A.47). Celui-ci ne prend pas en compte l'aspect mémoire contenu dans les termes de convolution des efforts de rayonnement. Ce modèle évalue cependant correctement les efforts d'amortissement et de masse ajoutée à la résonance. Ce choix est relativement arbitraire : Sgobbo et Parsons remplacent (A.47) par (A.45) avec pour  $\omega$ , la pulsation de rencontre des vagues pour un état de mer donné, à une vitesse donnée, à l'angle de rencontre où les

mouvements sont les plus amples ( $55^\circ$  pour une vitesse de 15 noeuds)– [50] ; Kummer, Hardier et Lambert prennent à chaque angle de rencontre des vagues la pulsation de rencontre  $\omega=\omega_e$  [33].

On peut aussi évaluer les matrices du modèle par identification après des essais à la mer sur le navire complet, ou bien par des essais en bassin.

$$\left(M + M_A(U_0, \omega_0)\right) \ddot{x} + \left(C(U_0) + D_A(U_0, \omega_0)\right) \dot{x} + Gx = \tau_D + \tau_C \quad (\text{A.52})$$

On remarquera aussi que les périodes de résonance en pilonnement et en tangage ne sont pas les mêmes qu'en roulis. Ceci implique un traitement différent de chaque mouvement. De plus, contrairement au roulis, pour le type de navire qui nous intéresse, les résonances en pilonnement et tangage ne sont pas très marquées, ce qui rend le choix du modèle linéaire plus délicat : la présence des termes de mémoire pourrait mieux rendre compte des phénomènes physiques.

Cependant, la résonance est tellement marquée en roulis que la pulsation principale du spectre des mouvements sur la houle en fonction de l'angle de rencontre varie peu, et est située au niveau de la résonance du navire. Le calcul des spectres de roulis sur un état de mer 5 (pour un navire de type frégate) montre bien ce phénomène : la figure A.6 présente pour chaque angle de rencontre, la période de pic du spectre de rencontre, pour différentes houles (monochromatiques et dispersée avec plusieurs répartitions directionnelles). Le choix des matrices d'amortissement et d'inertie ajoutée à la pulsation de résonance est donc logique.

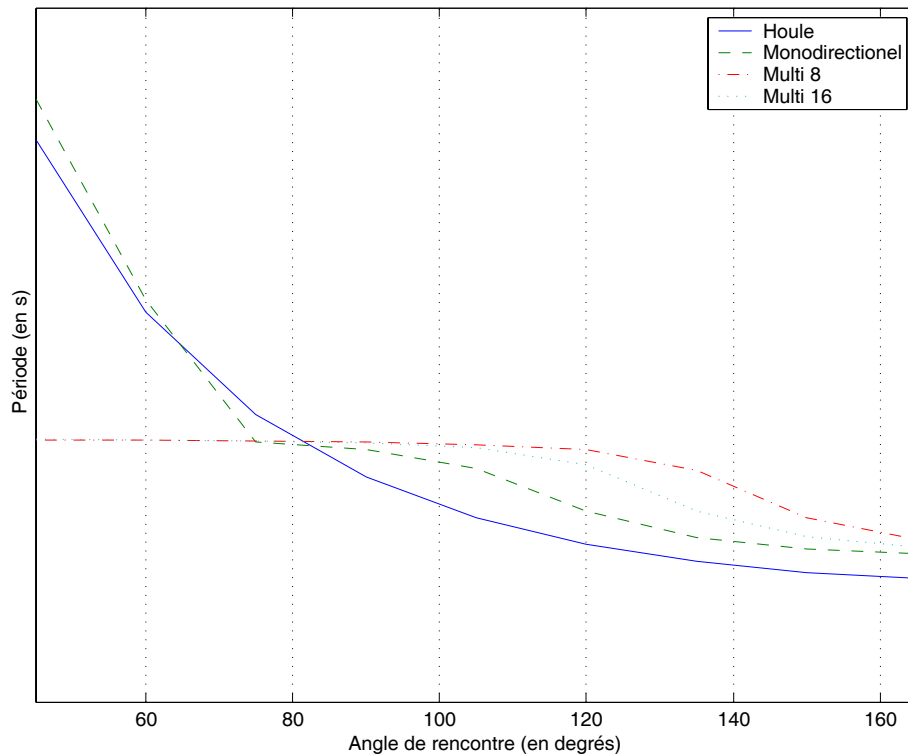


Figure A.6 Variation de la période du pic du spectre en fonction de l'angle de rencontre. En tirets : houle monodirectionnelle ; Tirets mixtes : houle répartie,  $s=4$  ; en pointillés : houle répartie,  $s=8$ .  $s$  est défini par (A.6). En traits pleins, période de pic du spectre de houle modifié par effet Doppler.

Des logiciels spécialisés permettent, avec des précisions et des temps de calculs différents, de simuler le comportement temporel du navire sur la mer de façon plus exacte : RATANA, développé par le Bassin d'Essais des Carènes<sup>13</sup> (voir [41]), LAMP (développé par SAIC<sup>14</sup>), FREDYN (développé par MARIN<sup>15</sup>).

### III.1.d.2 Validité du modèle

Quand onde et navire (représenté comme sur la figure A.5) ont une direction de déplacement proche, soit un angle de rencontre quasi nul, la pulsation de rencontre peut devenir négative, c'est à dire que le navire rattrape l'onde. Ces cas arrivent dans la réalité ; il faut pour cela que  $U_0 > g/\omega = c$ , vitesse de phase de l'onde. Pour une houle de période 8 secondes, on trouve :  $U_0 > 12,5 \text{ ms}^{-1} = 24,3$  nœuds. La prédiction du comportement du navire devient problématique car les équations écrites précédemment, (A.47), (A.50), et donc (A.38), ne sont plus valides. Les efforts prépondérants dé-

<sup>13</sup> Administration de la DGA, la Délégation Générale à l'Armement

<sup>14</sup> Science Applications International Corporation – Ship Technology Division. Annapolis, Maryland, USA

<sup>15</sup> Institut d'études maritimes des Pays Bas.

pendent très fortement de la forme de la surface immergée, qui varie en fonction des mouvements du navire et de la forme de la surface libre – dans le cas général, rappelons qu'on ne tient pas compte des variations de la forme exacte de la ligne de flottaison en fonction du temps : elle est supposée constante... Ces efforts sont mal prédits par la théorie présentée ici.

Dans ces conditions, les mouvements engendrés par la houle peuvent être très amples jusqu'à provoquer le chavirage. Des travaux importants sont toujours en cours dans le domaine, notamment dans la confrontation des modèles de simulation et des expériences à échelle réduite [6].

Si on veut utiliser le modèle développé il faut donc restreindre les cas d'étude aux situations où la théorie ne peut pas être mise en doute : la possibilité d'apparition de pulsation faibles ou négatives dépend de la vitesse, de l'angle de rencontre et du spectre. Plus le navire se déplace rapidement, plus existe le risque pour les mers de l'arrière que les fréquences de rencontre se déplacent vers des valeurs négatives ou proches de zéro.

Nous ne limiterons pas notre étude en simulation aux seuls cas valides (quand l'angle de rencontre est suffisamment grand), mais tiendrons compte dans l'analyse de ces limitations dans l'application de la théorie.

### III.1.e Simulation des perturbations

Parmi les efforts hydrodynamiques  $\tau_H$ , les efforts de rayonnement  $\tau_R$  et d'Archimède  $\tau_A$  ont été intégrés au modèle dynamique (A.52). Les autres efforts de houle incidente et diffractée  $\tau_D$  seront considérés comme une entrée de perturbation du système. Cette approche est résumée schématiquement par figure A.7.

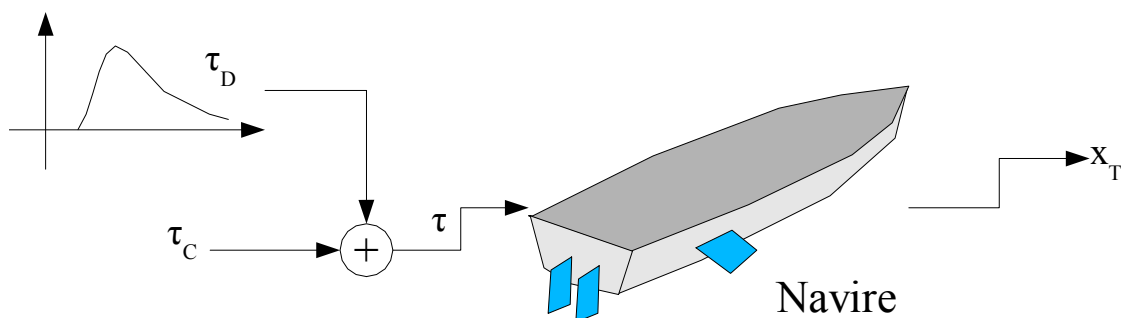


Figure A.7 Modèle du navire avec perturbations de la houle en efforts

### III.1.e.1 Perturbation en mouvements

En l'absence de termes non-linéaires, les perturbations en entrées (efforts) sont strictement équivalentes à des perturbations en sortie (mouvements). Une autre formulation du modèle dynamique (A.53) illustrée par la figure A.8, peut être utilisée : la dynamique donne la réponse du navire à ses actionneurs via  $\tau_c$  et la perturbation due à la houle est synthétisée dans la variable  $x_p$ .

$$\begin{cases} (M + M_A(U_0, \omega_0)) \ddot{x} + (C(U_0) + D_A(U_0, \omega_0)) \dot{x} + G x = \tau_c \\ x_T = x + x_p \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

Les mouvements de perturbation sont calculés à partir d'un noyau de convolution  $K_X$ , calculé à partir de  $K_D$ . On écrira alors :

$$x_p = \int_{-\infty}^t K_X(U_0, \psi_e, t - \tau) \xi(\tau) d\tau \quad (\text{A.54})$$

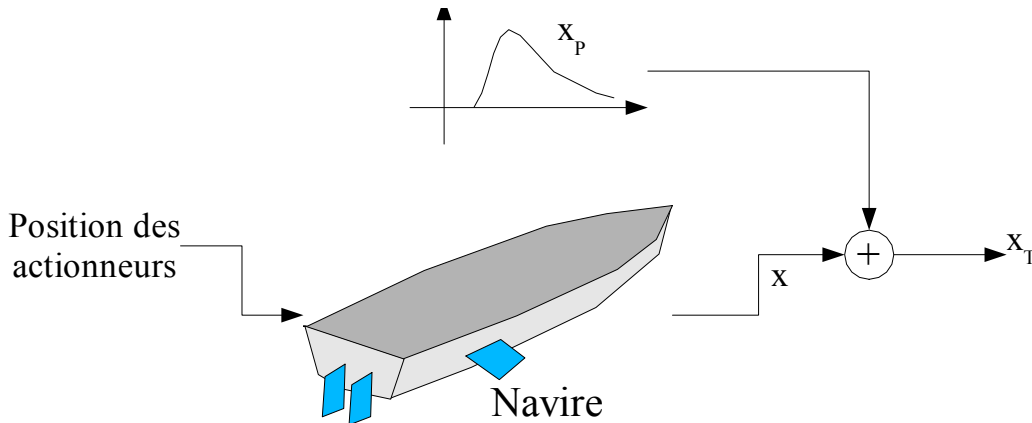


Figure A.8 Modèle du navire avec perturbations de la houle en mouvements

Par la suite, seul le modèle (A.53) a été utilisé.

### III.1.e.2 Simulation temporelle des perturbations

Nous rappelons que pour la simulation d'un signal de hauteur de houle (voir §II.4), la technique est d'assimiler le spectre continu de houle à un spectre de raies, que l'on sait simuler à partir des séries de Fourier. Il faudrait alors calculer la transmission du spectre d'état de mer par les fonctions de transfert entre hauteur de houle et mouvements de perturbation par (A.55), où  $S_{\xi\xi}$  est le spectre d'état de mer,  $S_{pp}$  le spectre des mouvements de perturbation  $x_p$  et  $F$  la fonction de transfert entre hauteur de houle et mouvements de perturbation.



$$S_{PP}(\omega) = |F(\omega)|^2 S_{\xi\xi}(\omega) \quad (\text{A.55})$$

Mais, en gardant cette formulation, degré de liberté par degré de liberté, les signaux entre eux ont un déphasage arbitraire. Or dans la réalité, les mouvements ont un déphasage précis entre eux. La méthode utilisée est donc différente : comme le signal est décomposé en une somme de sinusoïdes, nous calculons la transmission de chacune séparément, puis recomposons le signal final par sommation. Pour une composante  $i$  (de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$ , de pulsation  $\omega_i$ ), nous calculons

- l'amplitude :  $A_i = |F(\omega_i)| (2 S_{\xi\xi}(\omega_i) \Delta \omega)^{1/2}$
- son déphasage est :  $\Phi_i = \text{Arg } F(\omega_i)$
- une phase aléatoire  $\chi_i$  prise entre 0 et  $2\pi$  (permettant de reconstituer l'information en phase).

Une fois les amplitudes et déphasages connus, pulsation par pulsation, le signal de perturbation en mouvements est reconstitué par (A.56).

$$\mathbf{x}_p(t) = \sum_i A_i \cos(\mathbf{k}_i \boldsymbol{\eta} - \omega_i t + \Phi_i + \chi_i) \quad (\text{A.56})$$

Lloyd ([37]) précise que pour obtenir une estimation statistique correcte des grandeurs de la hauteur d'eau en un point, la durée minimale d'observation est  $100 T_z$ . Les caractéristiques des mouvements étant proches, l'analyse est la même : dans le cas d'un signal de roulis, la période de pic du spectre est d'environ 10 à 12 secondes. Ce qui fait une durée de simulation de 1200 secondes, soit 20 minutes.

Ce calcul ne tient pas compte de la modification de la pulsation de pic du spectre en fonction de l'angle de rencontre de la houle. Cependant, la période de pic du spectre des mouvements de roulis évolue comme la période de rencontre sur une houle mono-directionnelle, mais très peu sur une houle répartie. Il est alors cohérent de considérer toujours une durée de simulation de 20 minutes quel que soit l'angle de rencontre et la vitesse du navire. Pour les autres mouvements, il faudrait allonger les simulations aux fréquences de rencontre faibles.

### ***III.2 Efforts produits par des ailerons***

Les performances du système de stabilisation d'un navire dépendent des actionneurs qui l'équipent et de leur commande. Il existe différentes classes d'actionneurs, ayant chacun son effica-

cité, et son domaine de fonctionnement optimal. Le choix prend en compte des contraintes de coût (construction, installation, maintenance, réglage), d'utilisation (plages de vitesse, efficacité souhaitée) et des inconvénients (traînée augmentée). On distingue notamment :

- les surfaces portantes (ailerons de stabilisation, T-Foil anti-tangage, gouvernails)
- déplacement de masses, passifs ou semi-actifs
- appendices fixes : quilles anti roulis, paravanes

On trouvera dans [23] un comparatif des différents dispositifs, du point de vue de l'efficacité, de la complexité d'installation et du coût. Nous nous intéressons dans la suite au cas d'un navire équipé d'une paire de gouvernails et d'une paire d'ailerons de stabilisation. Nous détaillons par la suite les effets dus   la présence de ces surfaces portantes dans la dynamique du navire. Les paramètres géométriques utilisés permettent de décrire les efforts produits par des ailerons de stabilisation ainsi que par des gouvernails.

Les efforts produits par un aileron proviennent de plusieurs sources : des modifications du champ de pression à sa surface lorsqu'on le met en incidence dans un fluide (efforts de portance et de traînée) ; des effets de masse ajoutée. L'effort de portance produit est proportionnel à la masse volumique du fluide  $\rho$ , à la surface de l'aileron  $S$ , et au carré de la vitesse par rapport au fluide  $U_0^2$  (A.57), classique en mécanique des fluides – [37]. Le coefficient de proportionnalité est le coefficient de portance  $C_L$ , dépendant de l'incidence  $\beta$ . L'incidence d'un aileron est définie par l'angle créé entre la corde moyenne de l'aileron et la direction moyenne de l'écoulement, voir figure A.9.

$$L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L(\beta) \quad (\text{A.57})$$

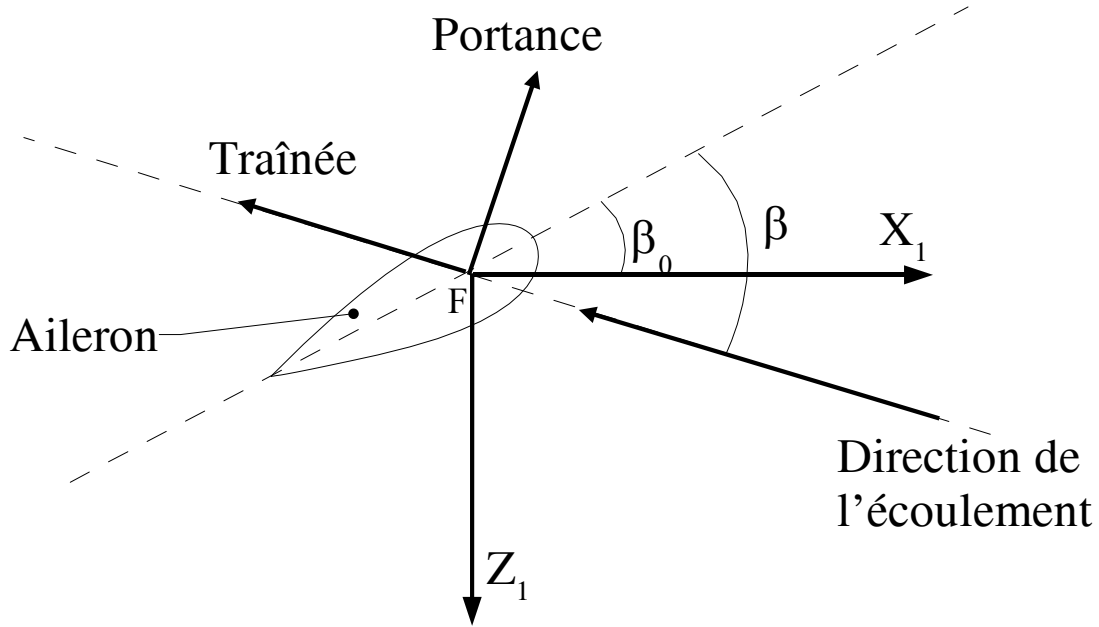


Figure A.9 Positionnement des ailerons sur la carène

Nous ne considérons pas les efforts de traînée, supposés compensés par les efforts de propulsion. Pour déterminer les efforts exercés sur la carène, il faut donc calculer l'incidence de l'aileron et transporter l'effort au centre de gravité (en tenant compte des moments par rapport à celui-ci).

### III.2.a Incidence véritable

Comme il est fixé au navire, l'aileron en subit les mouvements, notamment de rotation ; ces mouvements modifient les vitesses relatives à l'eau, et donc l'incidence (voir figures A.9 et A.10). Les notations sont définies dans la table A.4. L'incidence relative, tenant compte des mouvements du navire, est donnée dans (A.58).

$$\beta = \beta_0 + \sin \gamma \frac{v}{U_0} + (y_F \cos \gamma + z_F \sin \gamma) \frac{p}{U_0} - x_F \sin \gamma \frac{r}{U_0} \quad (\text{A.58})$$

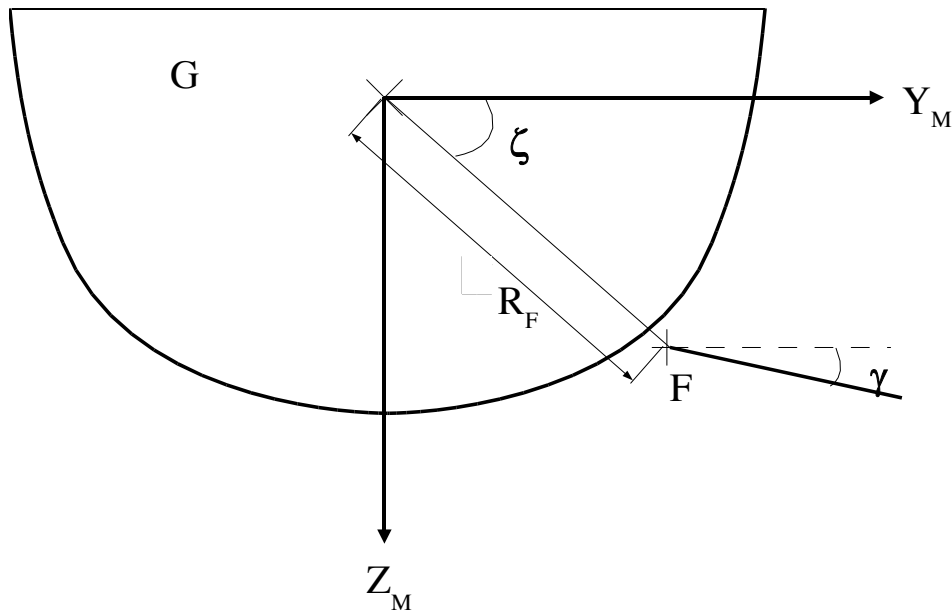


Figure A.10 Positionnement des ailerons sur la carène

La variable de commande est l'incidence de l'aileron par rapport à la carène,  $\beta_0$ . Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter [52], [53], [21]. Il est possible d'étendre les calculs aux efforts en tangage et pilonnement.

Not.	Grandeur	Not.	
$\beta$	Incidence totale	$\beta_0$	Braquage mécanique de l'aileron
$\gamma$	inclinaison de l'axe de l'aileron par rapport à l'axe $GY$	$\bar{c}$	corde moyenne de l'aileron
$\zeta$	angle repérant la position des ailerons	$S$	Surface de l'aileron
$x_F, y_F, z_F, R_F$	Position de l'aileron par rapport au centre de gravité ; on a $y_F = R_F \cos \zeta$ et $z_F = R_F \sin \zeta$	$C_m$	Coefficient de masse ajoutée
$C_L(\beta)$	Coefficient de portance, fonction de l'incidence $\beta$	$C_{l\beta}$	Expression linéaire du coefficient de portance

Table A.4 Notations pour l'expression des efforts produits par des ailerons

### III.2.b Efforts de stabilisation

Les efforts de stabilisation sont exprimés dans le repère lié à l'écoulement - la direction de la portance est définie par rapport à l'écoulement moyen. En rapportant tous les efforts au centre de

gravité, et en linéarisant les équations (nous avons supposé les mouvements petits), les efforts dus aux ailerons peuvent être exprimés par trois termes, voir (A.59) : l'un proportionnel à l'accélération (effet de masse ajoutée), le second à la vitesse et le troisième au braquage des ailerons. Les coefficients de proportionnalité sont des matrices dont l'expression est donnée dans (A.60) à (A.62).

$$\tau_C = -M_F \ddot{x} - U_0 D_F \dot{x} + U_0^2 B_F \beta_0 \quad (\text{A.59})$$

$$M_F = 2 \rho S \bar{c} C_m \begin{pmatrix} \sin^2 \gamma & -R_F \sin \gamma \cos(\zeta - \gamma) & x_F \sin^2 \gamma \\ -R_F \sin \gamma \cos(\zeta - \gamma) & R_F^2 \cos^2(\zeta - \gamma) & -x_F R_F \sin \gamma \cos(\zeta - \gamma) \\ x_F \sin^2 \gamma & -x_F R_F \sin \gamma \cos(\zeta - \gamma) & x_F^2 \sin^2 \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{A.60})$$

$$D_F = \rho S C_{L\beta} \begin{pmatrix} \sin^2 \gamma & -R_F \sin \gamma \cos(\zeta - \gamma) & x_F \sin^2 \gamma \\ -R_F \sin \gamma \cos(\zeta - \gamma) & R_F^2 \cos^2(\zeta - \gamma) & -x_F R_F \sin \gamma \cos(\zeta - \gamma) \\ x_F \sin^2 \gamma & -x_F R_F \sin \gamma \cos(\zeta - \gamma) & x_F^2 \sin^2 \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{A.61})$$

$$B_F = \rho S C_{L\beta} \begin{pmatrix} \sin \gamma \\ -R_F \cos(\zeta - \gamma) \\ x_F \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{A.62})$$

### III.2.c servogouvernes

La mise en incidence des ailerons est elle-même le résultat d'un asservissement. Nous ne considérons pas ce problème en tant que tel, et supposons l'asservissement correctement réglé : rapide, sans dépassement, et précis.

Les servogouvernes ont donc une dynamique propre, dictée par le réglage de cet asservissement, comme cité précédemment, mais aussi par la mécanique (son inertie et les efforts hydrodynamiques sur l'aileron). Par la suite nous considérerons une dynamique simplifiée des servogouvernes : nous considérons qu'il s'agit d'un processus dynamique continu du second ordre, de pulsation  $\omega_a$  et d'amortissement  $\zeta_a$ , voir (A.63). On notera  $\alpha$  le braquage réalisé, et  $\alpha_d$  le braquage demandé.

$$\alpha = \frac{1}{1 + 2 \frac{\zeta_a}{\omega_a} s + \frac{1}{\omega_a^2} s^2} \alpha_d \quad (\text{A.63})$$

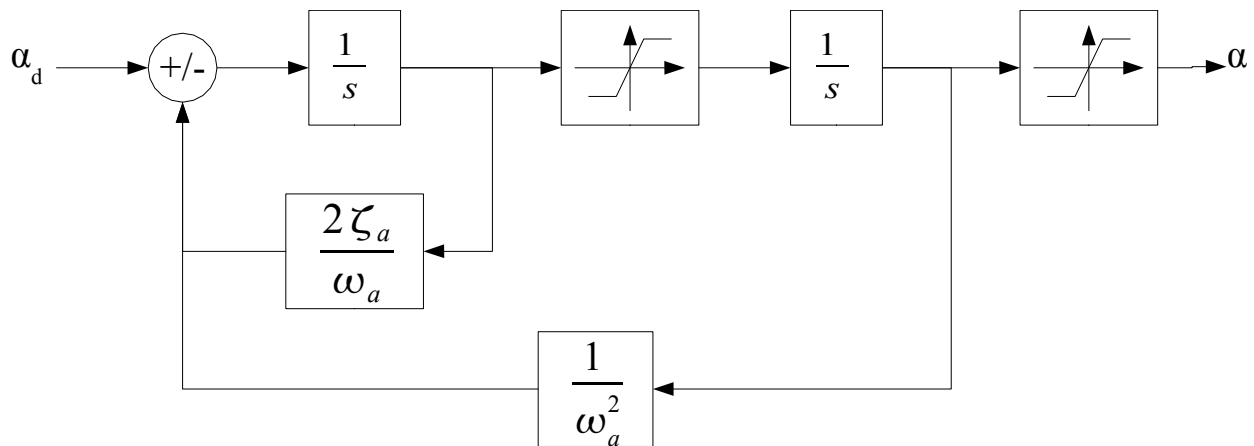


Figure A.11 Intégration des saturations dans un modèle approché de la dynamique des actionneurs

La dynamique complète fait appel à la modélisation de l'actionneur en lui-même (hydraulique, pneumatique, actionneurs électriques) et de son asservissement. Elle doit aussi tenir compte des saturations en position et en vitesse. Pour les prendre en compte de façon approchée, on intègre dans la modélisation précédente (A.63) des limitations comme indiqué sur la figure A.11.

Ces limitations sont de plusieurs types :

- structurelles : présence de butées;
- mécaniques : la résistance en torsion de la mèche est limitée;
- hydrodynamique : apparition de la cavitation, décrochage

Il est essentiel d'éviter les zones où ces phénomènes pourraient apparaître : la cavitation<sup>16</sup> diminue les performances, dans le cas d'une surface portante à vitesse moyenne (quinze à vingt-cinq nœuds), et peut aussi endommager fortement la surface de l'aileron et provoquer du bruit. Au décrochage<sup>17</sup> correspond une perte de portance importante et brutale. Des limites logicielles (dans l'asservissement), plus restrictives que les limites mécaniques permettent d'assurer que les limites mécaniques ne seront jamais atteintes. Ces limites sont fixées par analyse des conditions d'apparition de la cavitation, du décrochage et la limitation des efforts transmissibles par la mèche. Elles sont variables avec la vitesse du navire sur l'eau.

<sup>16</sup> Formation de bulles d'air quand la pression dans l'eau est plus basse que la pression de vapeur saturante: l'eau se vaporise.

<sup>17</sup> Les particules d'eau ne suivent plus la surface de l'aileron jusqu'au bord de fuite: il existe un point où elles décrochent. Il apparaît, après ce point, une zone de recirculation, où les particules d'eau reviennent en arrière.



## **Chapitre IV Modèles**

Dans la suite de ce mémoire, nous utiliserons en synthèse le modèle (A.53), la modélisation des efforts (A.59), ainsi que la modélisation simplifiée des actionneurs (A.63). La simulation prend en compte le même modèle dynamique, mais la modélisation des actionneurs intègre la présence des saturations.

Les données numériques (les coefficients des matrices, les fonctions de transfert de la perturbation) sont issus d'un code de calcul hydrodynamique (AQUA+) – leurs valeurs ne sont pas décrites ici pour des raisons de confidentialité ; les données numériques des actionneurs proviennent d'estimations des coefficients.

La dynamique du braquage d'une servocommande  $\alpha$  en fonction du braquage demandé  $\alpha_d$  est résumée dans (A.63) pour le cas linéaire, ce qui est traduit en espace d'état par (A.64).  $\alpha_l$  est le vecteur d'état du braquage des ailerons de stabilisation. On notera  $\delta_l$  le vecteur d'état du braquage des gouvernails ;  $\delta_l$  obéit à des équations (A.65) similaires à celles de  $\alpha_l$ .

$$\dot{\alpha}_l = A_\alpha \alpha_l + B_\alpha \alpha_d \quad (\text{A.64})$$

$$\dot{\delta}_l = A_\delta \delta_l + B_\delta \delta_d \quad (\text{A.65})$$

L'expression complète du modèle est donc de la forme (A.66) - (A.67). On a noté  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \alpha_l, \delta_l)$ .

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(U_0) \mathbf{x} + B \mathbf{u} \\ x_T = x + x_P \end{cases} \quad (\text{A.66})$$

$$x_P = \int_{-\infty}^t K_X(U_0, \psi_e, t - \tau) \xi(\tau) d\tau \quad (\text{A.67})$$

La matrice  $A$  dépend de la vitesse  $U_0$  (A.68). La matrice  $\underline{M}$ , somme de la masse et des masses ajoutées, est :  $\underline{M} = M + M_A(\omega_0) + M_{F,\alpha} + M_{F,\delta}$ . La matrice  $\underline{D}$  vaut ici  $\underline{D} = C(U_0) + D_A(U_0, \omega_0) + U_0 D_{F,\alpha} + U_0 D_{F,\delta}$ .  $M_{F,\alpha}$  et  $M_{F,\delta}$  représentent (voir A.60) la matrice de masse ajoutée pour respectivement une paire d'ailerons de stabilisation et une paire de gouvernails.  $D_{F,\alpha}$  et  $D_{F,\delta}$  représentent (voir A.61) la matrice d'amortissement pour respectivement une paire d'ailerons de stabilisation et une paire de gouvernails.  $B_{F,\alpha}$  et  $B_{F,\delta}$  représentent (voir A.62) la matrice des efforts de commande pour respectivement une paire d'ailerons de stabilisation ou une paire de gouvernails. La matrice  $B$  est constante (A.69).  $\omega_0$  est la pulsation de résonance en roulis du navire.



$$A(U_0) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -\underline{M}^{-1}G & -\underline{M}^{-1}\underline{D} & U_0^2 B_{F,\alpha} & U_0^2 B_{F,\delta} \\ 0 & 0 & A_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_\delta \end{pmatrix} \quad (\text{A.68})$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_\alpha & 0 \\ 0 & B_\delta \end{pmatrix} \quad (\text{A.69})$$

On supprime ensuite les mouvements non nécessaires dans cette modélisation : les mouvements verticaux (cavalement, pilonnement, tangage).

On rappelle que ce modèle a été développé sous les deux hypothèses majeures suivantes : les mouvements sont de faible amplitude autour d'une position moyenne, voir §III.1.a ; la modélisation est valable si la pulsation de rencontre de la houle est supérieure à zéro, ce qui correspond aux cas où le navire ne rattrape pas la houle, voir §III.1.d.2.

## **Partie B Synthèse des correcteurs**



## ***Chapitre I Introduction***

Le problème de la « stabilisation<sup>18</sup> de roulis » n'est pas un problème nouveau : les premiers systèmes de stabilisation, des cuves anti-roulis, sont apparus à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle ; l'utilisation d'ailerons de stabilisation date de la même époque – voir [35], [23] et [10] pour plus de précision sur l'histoire de la stabilisation. C'est aussi un domaine de recherche active : il s'agit de l'une des thématiques (*Roll Damping*) de deux conférences IFAC spécialisées qui ont lieu tous les trois ans, en alternance, MCMC ou *Manoeuvring and Control of Marine Craft*, et CAMS ou *Control Applications in Marine Systems*. Et qui ne s'est pas dit, en traversant la Manche entre Roscoff et Plymouth par bateau, qu'il y avait encore des progrès à faire dans ce domaine... Mais des progrès sont-ils possibles ?

Afin d'analyser cette question et de finalement y apporter une réponse positive, nous allons revenir rapidement, dans ce chapitre d'introduction, sur le résultat final de la partie précédente : la modélisation du comportement en roulis d'un navire, en mettant en évidence les paramètres qui sont susceptibles de varier. Puis nous balayerons l'état de l'art sur les lois de stabilisation du roulis. Nous conclurons cet état de l'art par la constatation qu'un progrès « sensible » devrait être possible, si on tenait compte de la variation de certaines grandeurs physiques liées au navire ou à l'environnement, et qui influencent considérablement son comportement, alors qu'elle sont peu prises en compte dans les lois de commande actuelles. Nous introduirons alors rapidement les objectifs qui ont été les nôtres et la démarche de synthèse des lois de commande, au travers du développement d'une méthodologie, qui sera exposée en détails dans les chapitres de cette deuxième partie du mémoire.

### ***1.1 Rappels de modélisation***

La première partie de ce rapport a montré que l'étude de la dynamique d'un navire est abordable au prix de certaines simplifications et approximations. Au chapitre IV de la partie A, nous sommes parvenus à un modèle synthétique ne faisant apparaître que trois degrés de liberté couplés (roulis, lacet, embardée) et pour lequel deux types d'actionneurs sont pris en compte : des ailerons de stabilisation et des ailerons de gouvernail. Ce modèle condense les phénomènes fondamentaux régissant le comportement du navire, pour l'étude de stabilisation en roulis. Nous le rappelons ici :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(U_0)\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{x}_T = \mathbf{x} + \mathbf{x}_p \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

---

<sup>18</sup> les automaticiens parleront plus volontiers de l'atténuation du roulis.

$$x_P = \int_{-\infty}^t K_X(U_0, \psi_e, t - \tau) \xi(\tau) d\tau \quad (\text{B.2})$$

Parmi les caractéristiques pouvant varier du modèle, pris dans son ensemble, c'est-à-dire comprenant à la fois le navire et son environnement, nous distinguerons le chargement, la vitesse du navire, l'angle de rencontre des vagues et l'état de la mer.

Certains paramètres des termes du modèle (B.1), comme les matrices directement liées aux inerties du navire: la matrice d'inertie  $M$ , la matrice des termes d'accélération centrifuge  $C(U_0)$ , varient avec la charge embarquée par le navire et sa répartition<sup>19</sup>. Rappelons d'autre part la simplification effectuée lors de la modélisation des efforts de rayonnement qui a consisté à proposer d'évaluer les matrices  $M_A(\omega)$  et  $D_A(\omega)$  à la pulsation de résonance du navire  $\omega_0$ . Cette pulsation est également fonction du chargement. Dans la suite de notre étude nous considérerons que l'ensemble de ces paramètres –  $M$ ,  $M_A(\omega_0)$ ,  $D_A(\omega_0)$ ,  $\omega_0$  –, à l'exception de  $C(U_0)$ , seront fixes, ce qui en pratique est valide pour des navires dont les conditions de chargement varient peu d'un parcours à l'autre. Il est clair, en revanche, que si leur variation était importante, nous devrions envisager d'étudier leur effet sur les performances d'atténuation du roulis.

Par contre, connaître la variation de vitesse d'un navire et en utiliser explicitement l'information est important, et nous allons le montrer à la fin du chapitre II. Ce paramètre apparaît dès le début dans la matrice des termes centrifuges  $C$ , mais intervient surtout lors de la modélisation des actionneurs. L'équation (A.59) montre que l'efficacité des ailerons de stabilisation et des gouvernes varie en fonction du carré de la vitesse du navire. Concrètement, un aileron à 20 nœuds est quatre fois plus efficace qu'à 10 nœuds. Intégrer cette information dans la loi de commande est donc essentiel.

D'autres paramètres caractérisant la houle vont s'avérer importants dans l'étude des mouvements du navire, nous allons également le montrer à la fin du chapitre II : l'angle de rencontre  $\psi_e$  du navire avec la houle, la description de l'état de mer par la pulsation  $T_P$  du pic du spectre de la houle et la hauteur significative de la houle  $H_s$ . Aucun de ces trois paramètres n'est explicitement dans le modèle fourni au chapitre IV de la partie A. En fait, ils sont présents à travers la variable  $x_P$  qui synthétise à elle seule l'effet de la houle sur le navire dans le modèle (B.2).

---

<sup>19</sup> Par exemple : mouvements des passagers, embarquement de voitures dans un ferry, consommation du carburant.

En résumé, pour un navire, dans une configuration classique de chargement, nous avons considéré trois paramètres variants ayant des implications sur le comportement du navire, et qui devraient être intégrés dans les lois de commande :

- $U_0$ , la vitesse du navire par rapport à l'eau,
- $\psi_e$ , l'angle de rencontre de la houle par le navire,
- et  $EM$ , l'état de mer, qui est déterminé par une pulsation principale, un étalement fréquentiel et directionnel, et la hauteur du spectre d'état de mer.

### ***1.2 Lois de commande en atténuation du roulis***

Le domaine de la commande des navires est un champ d'application classique de l'Automatique, et l'on retrouve dans la littérature beaucoup de lois de commande différentes. Le domaine particulier de la stabilisation du roulis n'échappe pas à cette règle, nous allons le voir par la suite. Il faut cependant noter que ce domaine est stratégique autant pour les industries qui fournissent des systèmes de stabilisation que pour les marines nationales.

On peut distinguer quatre classes de problèmes qui structurent cette littérature, suivant le type d'actionneurs utilisés et les objectifs visés :

Problème 1. atténuation du roulis avec des ailerons de stabilisation, c'est un problème à un seul objectif et une seule entrée de commande (SISO),

Problème 2. atténuation du roulis et asservissement du cap avec les gouvernails, nommé aussi  $RRS^{20}$  ; c'est un problème à deux objectifs et une seule entrée de commande (SIMO),

Problème 3. atténuation du roulis avec ailerons de stabilisation et gouvernails ; c'est un problème à un seul objectif et deux entrées de commande (MISO),

Problème 4. atténuation du roulis et asservissement du cap avec ailerons de stabilisation et gouvernails ; c'est un problème à deux objectifs et deux entrées de commande (MIMO).

La compensation de la gîte, le roulis constant ou dû aux manœuvres, est en général écartée du problème de la stabilisation du roulis, et traitée à part. D'autres actionneurs (cuves anti roulis, ballast) sont utilisés pour la compenser, pour éviter d'introduire une composante constante dans la position des ailerons de stabilisation ou des gouvernails. La gîte due aux manœuvres est prise en

---

<sup>20</sup> *Rudder Roll Stabilisation* : stabilisation du roulis par les gouvernails (couplée avec l'asservissement du cap)

compte par une action prédictive, basée sur le pilotage du navire. Elle n'entre pas dans le cadre de ce mémoire, voir par exemple [33]

La loi de commande la plus utilisée dans le domaine est le PID. Notons que le terme PID est utilisé pour plus de compatibilité avec les standards de l'automatique, car le terme adéquat est PDD<sup>2</sup>. Les trois termes sont : en roulis (terme I ou P), en vitesse de roulis (terme P ou D) et en accélération de roulis (terme D ou D<sup>2</sup>). On trouvera souvent mention de ce type de loi ; citons en particulier [37], [12], [22], [32]. La méthode de réglage la plus classique, consiste à compenser le déphasage de la réponse dynamique du navire à ses ailerons de stabilisation à la résonance : [12]. Une version plus élaborée, proposée par Lloyd dans [37] tient compte de la phase apportée par les servo-commandes, et propose une variation des coefficients en fonction de la vitesse du navire par rapport à l'eau. Katebi, Hickey et Grimbale [32] ont proposé de régler la loi en passant par une optimisation sous contraintes. Notons aussi que c'est aussi le type de loi le plus appliqué dans la pratique pour la stabilisation du roulis.

Dans le cas du RRS (problème 2 – SIMO), Van der Klugt [35], rapporté par Fossen [23], propose un réglage par placement de pôles, basé sur la séparation des dynamiques en roulis et en cap. L'étude du problème est prolongée par les travaux de Van Amerongen, Van Nauta Lempke et Van der Klugt à la fin des années 80, exposés dans [35] et [4], et également rapportées dans [23]. Ils concernent des correcteurs de type LQ pour le cas du RRS. Le gain de retour d'état est modifié en temps réel ; il est issu d'équations de Ricatti dont les pondérations sont calculées par un algorithme basé sur la logique floue en fonction d'informations sur la saturation des gouvernails, les performances demandées en stabilisation du roulis et en asservissement du cap. La méthode a été appliquée sur une maquette navigante d'une frégate de la marine néerlandaise et les résultats sont reportés dans [4]. La méthode LQG avec des gains fixes a été rapportée par Sgobbo et Parsons dans [50], dans le cas MIMO (problème 4), et appliquée en simulation au cas d'une frégate des gardes côtes des USA.

En parallèle, au début des années 90, Grimbale, Katebi et Zhang ont proposé pour le problème 3 (MISO) un correcteur calculé à partir de la méthode  $H_\infty$  [26] ; cette méthode utilise une programmation en vitesse basée sur la compensation d'une partie des effets de la variation de la dynamique du navire avec la vitesse (du même type que Lloyd dans [37]), et sur l'hypothèse que les autres variations sont prises en compte par la robustesse de la loi de commande. Les auteurs notent que la variation de la vitesse du navire, des conditions de mer, et de l'angle de rencontre peuvent modifier l'activité des gouvernes et rendent difficile d'assurer les performances de la loi de com-

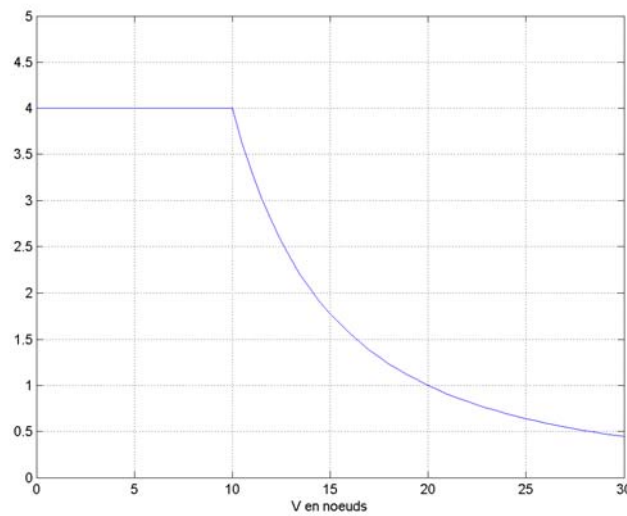


Figure B.1 Coefficient de programmation de la vitesse

mande<sup>21</sup>. La méthode développée dans [26] a été reprise par Katebi, Hickey et Grimble plus récemment dans le cas du problème 1 (SISO) [32]. En prolongement de cette technique, avec des objectifs de commande robuste, Roberts, Sharif, Agarwal et Sutton ont utilisé la  $\mu$ -synthèse dans le cas SISO, et ont appliqué le système au réel [49], complété par [51] avec les résultats finaux.

Avec une approche de commande robuste, Hearn, Katebi et Grimble ont appliqué une loi basée sur la méthode QFT, ou *Quantitative Feedback Theory*, en SISO [28]. Citons aussi le principe de la commande par modèle interne, appliquée dans [39] et [58].

Hors de ces cas classiques, on trouve aussi des lois de commande neuronale dans [38], et prédictive dans [14] et tout récemment dans [45] et [46].

Utiliser une loi de commande d'un type particulier n'est rien sans une méthode pour la régler. Cependant, dans beaucoup de publications sur le sujet, livres et articles, le réglage de la loi de commande n'est pas détaillé ou justifié : par exemple [50] ne détaille pas le réglage des pondérations de la méthode LQG, [51] et [32] ne détaillent pas le calcul des pondérations fréquentielles de la méthode  $H_\infty$ .

Nous avons mis en évidence dans le paragraphe précédent certains paramètres que nous estimons importants de prendre en compte dans la commande en atténuation du roulis pour un navire. La vitesse est parfois prise en compte: son utilisation est détaillée par Lloyd dans [37] pour le PID

21 « Changes in either ship speed, wave encounter angle or sea state, however, may affect the level of servo activity and consequently it should be prudent to assess the feedback control system performance when subject to a number of environmental conditions », in [26].



(SISO), et par Grimble *et al.* dans [26] pour le  $H_\infty$ . Dans les deux cas, la variation des lois de commande en vitesse est effectuée par un coefficient global réduisant les gains ; ce gain global a une variation inversement proportionnelle au carré de la vitesse du navire sur l'eau, voir figure B.1. L'évolution précise de tous les paramètres du modèle dynamique en fonction de la vitesse, par exemple de l'amortissement en roulis, n'est pas prise en compte.

Le correcteur développé par Van Amerongen *et al.* [4] s'adapte à l'environnement de façon indirecte : les pondérations du calcul LQ sont modifiées en fonction de la valeur de certaines variables par rapport à des seuils (si la position des gouvernails est saturée par exemple). Notons que Van der Klugt et De Keijer [34] remettent en cause cette approche par sa complexité et le manque de transparence pour les yeux d'un industriel, et privilégient une approche basée sur le calcul de la commande en termes d'efforts à appliquer couplée à un calcul de répartition de ces efforts sur les différents actionneurs.

Dans l'ensemble des lois de commande détaillées ici, aucune ne prend directement en compte la variation des paramètres définissant l'environnement (exceptée la vitesse du navire par rapport à l'eau). Notre but final dans ce rapport est de combler ce manque et de proposer une loi de commande variant avec ces paramètres, ainsi que la manière d'y aboutir.

Nous avons établi une liste des paramètres susceptibles de varier pendant l'évolution en mer d'un navire : vitesse par rapport à l'eau, angle de rencontre des vagues, état de mer (défini par sa pulsation dominante, et la hauteur moyenne de la houle). Notre objectif est qu'à partir de mesure de ces paramètres nous soyons capables d'appliquer la loi de commande adéquate. La mesure de la vitesse sur l'eau est faite classiquement par un capteur appelé loch, qui donne une valeur fidèle de la vitesse sur l'eau. La mesure des paramètres de l'état de mer et de l'angle de rencontre de la houle devient opérationnelle : soit par l'analyse sur une longue période (vingt minutes) des mouvements du navire, soit par l'analyse de la surface de la mer au moyen d'un radar. Il s'agit d'un domaine de recherche actif aujourd'hui.

Dans cette optique se posent deux problèmes, que nous avons déjà évoqués : comment régler les lois de commande ? et comment calculer un régulateur qui varie en fonction des paramètres choisis ? Notre propos est d'apporter des éléments de réponse à ces deux questions.

### ***1.3 Démarche de synthèse des lois de commande***

Définissons tout d'abord les objectifs à atteindre pour l'asservissement que nous voulons construire. Nous souhaitons atténuer au maximum les mouvements de roulis à l'aide des actionneurs disponibles, en tenant compte de leurs limitations, *i.e.* en évitant les saturations, et tenir compte du mieux possible des variations de l'environnement.

Ce deuxième objectif a guidé nos pas dans notre manière d'aborder le premier. En effet, l'approche classique dans le calcul d'un régulateur à gains programmés est d'effectuer des réglages à des points de fonctionnement bien choisis, et de calculer ensuite un régulateur global interpolant les régulateurs aux points de fonctionnement. Une autre approche consiste à calculer directement un régulateur à gain programmé à partir d'un modèle à paramètres variant. La difficulté dans notre étude est que les paramètres variant mis en évidence précédemment (§I.1) n'apparaissent pas tous explicitement dans le modèle ; seule la vitesse  $U_0$  apparaît explicitement dans les équations. Mais nous verrons plus loin qu'en synthétisant des régulateurs pour des points de fonctionnement bien choisis, il est possible de construire le modèle nécessaire : dans le cadre d'une optimisation  $H_\infty$ , la synthèse est basée sur le choix de pondérations qui, avec le modèle initial du processus à commander, définit le modèle standard nécessaire au calcul du régulateur. C'est dans ces pondérations qu'apparaîtront les paramètres caractérisant l'environnement, et leur intervention variera suivant le point de fonctionnement choisi. L'idée est donc de calculer un modèle standard global, à paramètres variant, à partir des modèles standards « fixes » utilisés pour la synthèse à chaque point de fonctionnement. En résumé, le régulateur global n'est pas obtenu à partir de régulateurs fixes, mais calculé à partir d'un modèle standard, qui, lui, est issu de modèles standards « fixes » qu'il nous faut calculer.

Dans cette optique, le premier objectif doit être de calculer des modèles standards – et des régulateurs – pour des « points de fonctionnement bien choisis », donc pour des conditions d'évolution précises du navire.

Nous l'avons mentionné au paragraphe précédent, il n'existe pas de méthodologie générale pour le réglage de correcteurs pour une vitesse, un angle de rencontre et un état de mer donné. Nous avons donc construit une méthodologie de réglage de lois de commande répondant à ce besoin ; elle est exposée au chapitre II. Sa construction ne s'est pas faite *ex cathedra* mais a reposé sur la modification graduelle d'une méthodologie de départ : d'abord adaptée au réglage de PID, elle a été ensuite utilisée pour régler des correcteurs de type  $H_\infty$ . L'idée de base est que le réglage d'une loi de

commande importe tout autant que sa structure. Il fait appel à l'expérience de l'ingénieur automatique et aux conseils des spécialistes de la modélisation. Comme dans chaque application de l'automatique, l'expérience de l'ingénieur à manipuler les outils mathématiques de synthèse compte autant que la forme de la loi de commande. Un correcteur de type  $H_\infty$  pourra conduire à des résultats faibles par rapport à un correcteur de type PID s'il est mal réglé, tout comme le contraire. Citons Boyd et Barrat in « Linear Controller Design: Limits of performance », paru chez Prentice-Hall en 1991 [8] :

« In practice, existing controllers design methods are often successful at finding a suitable controller, when one exists. These methods depend upon talent, experience, and a bit of luck on the part of the control engineer. If the control engineer is successful and finds a suitable controller, then of course the controller design problem has been solved. However, if the control engineer *fails* to design a suitable controller, then he or she *cannot* be sure that there is no suitable controller, although the control engineer might suspect this. Another design approach or method (or indeed, control engineer) could find a suitable controller. »

Pour régler les correcteurs, nous avons écrit notre problème de synthèse sous la forme d'un problème d'optimisation multi-objectifs. Ceci permet d'écarter une part de subjectivité dans notre réglage. Nous détaillons notre approche dans le chapitre II, ainsi que les méthodes utilisées pour la résolution de ce problème. Nous présentons aussi les résultats d'optimisation montrant l'intérêt de notre démarche.

D'autre part, le second objectif que nous nous sommes fixés, à savoir la construction d'un régulateur dépendant de la vitesse et des paramètres de l'état de mer, nécessite de faire des choix. Choix de représentation, d'abord, puisqu'il faut calculer une représentation fidèle et utilisable du système variant ; choix d'une méthode de synthèse ensuite, qui est évidemment lié au précédent, puisqu'il faut ici arriver à calculer un régulateur variant et donnant aussi des performances correctes.

Cette dernière étape pose problème, et peut être résolue par différents procédés : commutation des correcteurs, interpolation des lois de commande aux points de fonctionnement, synthèse directe par analyse non linéaire [23], [31], synthèse directe par résolution de LMI [3], [11], [20]. Les méthodes disponibles sont de nature très variée, et d'utilisation aussi variée. Le choix d'une approche de synthèse est très lié à la modélisation du process lui-même : linéaire, non-linéaire, LPV sous forme affine, polytopique ou LFT, ... mais aussi aux objectifs poursuivis : quelle certitude de stabilité ? quels outils utiliser ?

Nous avons choisi les principes suivants comme socle de notre étude :

1. Assurer la stabilité de la boucle fermée et du correcteur, quelles que soient les variations des paramètres,
2. Se baser sur des théories éprouvées et des outils existants.

Nous avons mis de côté l'idée d'obtenir un correcteur global par interpolation de lois de commande à des points de fonctionnement, pour privilégier une synthèse directe basée sur un modèle à paramètres variant. Les techniques à base de résolution de LMI à partir d'une représentation de notre système sous forme polytopique nous ont fourni les outils nécessaires. Notre démarche est exposée au chapitre III.

Notre démarche a un fondement industriel : les lois de commande ont pour finalité l'application au réel, ce qui s'accommode mal d'un réglage fastidieux et long. En parallèle, les développements longs et théoriquement difficiles de certains calculs n'étaient pas envisageables, dans les restrictions temporelles que nous nous étions fixées. Nous avons donc privilégié l'utilisation d'outils déjà existants, contre la création de nouveaux outils.

Pour finir, le travail que nous présentons dans ce mémoire, est d'origine et de finalité pratique. Notre apport repose dans la proposition d'une méthodologie générale de réglage des lois de commande pour des conditions d'évolution du navire données, basée sur l'usage de l'optimisation multi-objectifs pour en aborder la résolution ; et d'autre part dans l'application d'une méthode de synthèse à gains programmés par LMI (synthèse polytopique) pour tenir compte de paramètres variants dans les lois de commande.



## ***Chapitre II Calcul des correcteurs pour des points de fonctionnement donnés***

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la stabilisation d'un navire évoluant avec (1) une vitesse par rapport à l'eau  $U_0$  constante, (2) un angle de rencontre de la houle  $\psi_e$  constant, et (3) pour un état de mer EM constant. Ces trois paramètres, mis en évidence dans l'introduction pour leur importance dans le comportement dynamique du navire, sont donc ici supposés fixes, définissant ainsi ce que l'on appellera par la suite un point de fonctionnement.

Le but de ce chapitre est de décrire la méthodologie que nous proposons et que nous avons utilisée pour le réglage de lois de commande dédiées à de tels points de fonctionnement.

Qu'attend-on exactement des lois de commande recherchées ? Nous pourrions simplement le décrire par les phrases suivantes : « *Le correcteur doit, à un point de fonctionnement donné, permettre d'atténuer au maximum les mouvements de roulis du navire sur la houle, en utilisant les ailerons de stabilisation et les gouvernails, en évitant de dépenser trop d'énergie, et en évitant d'atteindre les saturations des actionneurs. Les ailerons de stabilisation ne doivent pas atténuer la gîte, ni servir à l'asservissement du cap.* ».

Naturellement, ce libellé ne fait pas ressortir les concepts mathématiques et physiques des performances attendues ou des contraintes à prendre en compte.

Nous donnerons, au paragraphe II.1, les termes du cahier des charges, puis nous définirons les grandeurs ou critères utilisés, et nous décrirons dans le paragraphe suivant (§II.2) les calculs nécessaires à leur estimation. Le principal apport dans cette partie réside dans le paragraphe II.3 ; le problème de réglage d'une loi de commande sera décrit comme un problème d'optimisation multi-objectifs et résolu comme tel. Nous appliquons ensuite la méthodologie définie à deux types de loi de commande : PID (§II.4) et  $H_\infty$  (§II.5). Les résultats d'optimisation et de simulations sont regroupés au paragraphe II.6 pour mettre en évidence la nécessité de s'adapter aux trois paramètres variants en pratique.

## ***II.1 Performances et contraintes définissant le cahier des charges***

### ***II.1.a Les performances à atteindre***

Le roulis est un mouvement naturellement stable, sauf dans quelques situations extrêmes. Sur un état de mer stationnaire, le navire est perturbé en permanence ; en supposant que l'on observe le navire sur un intervalle de temps infini, l'énergie du signal de roulis est aussi infinie. Il a par contre, heureusement, une puissance finie. C'est la moyenne de cette puissance qui nous intéresse. On rend cette grandeur statistique accessible par l'hypothèse ergodique : le calcul des moyennes et variances dans le domaine temporel et dans le domaine des réalisations donne les mêmes résultats. Ainsi, nous pouvons traduire l'expression « minimiser les mouvements de roulis » par « minimiser la puissance moyenne du signal de roulis ».

L'utilisation de l'informatique dans le calcul des lois de commande permet d'effectuer plusieurs simulations identiques, avec ou sans correcteur, et de les comparer. La performance d'une loi de commande en termes de stabilisation du roulis, est définie par la donnée de la puissance  $\sigma_{\phi,a}$  du signal de roulis quand le correcteur stabilise le navire comparativement à la puissance du signal de roulis sans stabilisation  $\sigma_{\phi,s}$ . De ces valeurs on déduit le taux de réduction (B.3), qui sera utilisé pour la présentation des résultats.

$$TR = \frac{\sigma_{\phi,s} - \sigma_{\phi,a}}{\sigma_{\phi,s}} \quad (\text{B.3})$$

Les signaux de commande sont aussi analysés en calculant leur puissance moyenne. Ainsi nous traduisons « en évitant de dépenser trop d'énergie » par « minimiser la puissance moyenne des signaux de braquage des ailerons de stabilisation et des gouvernails ». Notons que nous ne tenons pas compte, de cette façon, de la dépense exacte d'énergie dans les servocommandes – pompes hydrauliques, dissipation de chaleur dans les joints, transmission de puissance, etc. – mais l'agitation des actionneurs est une mesure simple de l'énergie dépensée. Nous noterons la puissance des signaux de braquage des ailerons de stabilisation  $\sigma_a$  et celle des gouvernails  $\sigma_\delta$ . La grandeur<sup>22</sup> à minimiser est alors :  $\sigma_a^2 + \sigma_\delta^2$ .

---

<sup>22</sup> Nous nous intéressons ici à la consommation totale de puissance, mais il est aussi possible de minimiser les deux termes  $\sigma_a$  et  $\sigma_\delta$  séparément.

### **II.1.b Les contraintes à prendre en compte**

Nous avons dans le paragraphe précédent défini les performances à prendre en compte. Précisons maintenant les contraintes du cahier des charges.

Les contraintes physiques portant sur la saturation des actionneurs sont nécessaires pour éviter de trop solliciter les éléments mécaniques des servocommandes. Nous souhaitons éviter que les actionneurs saturent trop souvent. Une saturation est définie par l'existence d'un intervalle de temps pendant lequel l'actionneur est saturé, peu importe sa durée. Comme les signaux de commande sont à moyenne nulle et oscillatoires, cela revient à déterminer le nombre de fois que le signal de la position de l'actionneur dépasse, en valeur absolue, une valeur seuil avec une dérivée positive. Nous introduisons donc les contraintes suivantes :

- le nombre de saturation par minute des ailerons de stabilisation en position et en vitesse doit être inférieur à deux,
- le nombre de saturation par minute des gouvernails en position et en vitesse doit être inférieur à deux.

Notons que le braquage maximal autorisé des ailerons et gouvernails est variable avec la vitesse, pour tenir compte des limitations dues aux phénomènes de cavitation, décrochage (voir III.2, partie A).

Les ailerons de stabilisation ne doivent pas servir à compenser la gîte : d'autres actionneurs sont utilisés pour cela (cuves anti-roulis ou ballast). Ils ne doivent pas non plus servir à asservir le cap : ils ont en général un effet non nul mais très faible sur le mouvement de lacet. Cela se doit traduire par l'absence d'action en basses fréquences des ailerons de stabilisation.

Ces contraintes ne sont pas suffisantes pour calculer une loi de commande. L'expérience nous a montré la nécessité de rajouter un certain nombre d'exigences. Il est naturel de rajouter que la boucle fermée par le correcteur doit être stable, et que le correcteur lui-même doit être stable – s'il doit pouvoir fonctionner de manière autonome avant qu'on en utilise la commande. Nous définissons des contraintes légèrement plus fortes en imposant que les valeurs propres des transferts de la boucle fermée et du correcteur aient leur partie réelle inférieure à un réel  $-r$ , avec  $r$  réel strictement positif.

Les lois de commande doivent en parallèle maîtriser deux sorties qui sont le roulis et le cap du navire, en prenant parti de la présence de deux actionneurs différents. Les gouvernails servent



principalement à asservir le cap, mais peuvent également être utilisés dans la stabilisation, parce que les constantes de temps des mouvements sont différentes : la période de résonance en roulis est d'environ 10 secondes, et on compte une minute pour la constante de temps du cap. Nous limiterons toutefois l'action des gouvernails dans la stabilisation à un niveau donné, afin de conserver une certaine qualité de l'asservissement du cap, mais aussi de comparer les lois de commande entre elles. Le calcul de la répartition des actions respectives des gouvernails et ailerons de stabilisation est présenté dans le paragraphe II.2, avec la définition des valeurs représentatives.

Il faut, de plus, éviter d'amplifier à certaines fréquences les perturbations que l'on atténue à d'autres. L'énergie de la houle ne crée pas des mouvements de perturbation uniquement à la résonance, et le spectre de houle sur lequel le navire évolue dans la réalité n'est jamais identique à celui utilisé pour la synthèse des correcteurs : il est donc nécessaire de s'assurer que les fréquences proches de la résonance ne sont pas trop amplifiées. Pour cela, nous imposons que la sensibilité en sortie en roulis doit avoir une amplification sous la résonance du navire inférieure<sup>23</sup> à 2 dB, et au dessus de la résonance, inférieure à 6 dB.

Finalement, pour tenir compte de la présence de déphasages dus aux filtrages, de retards de transmission entre les différents composants de l'asservissement, et des déphasages variables dus à la discrétisation de la commande, nous imposons que l'asservissement reste stable même en présence d'un retard de 0,75 seconde en entrée du correcteur.

Les différentes contraintes, classées dans un ordre différent du précédent, sont résumées dans la table B.1.

---

<sup>23</sup> Les valeurs correspondent respectivement à une amplification de 1,35 et 1,995. Ces valeurs sont empiriques mais correspondent à des seuils réalistes. Cette contrainte est issue de [32].

1. la répartition de la puissance de stabilisation entre ailerons de stabilisation et gouvernails doit rester dans des proportions données,
2. le nombre de saturations des ailerons de stabilisation en position doit être inférieur à deux par minute,
3. le nombre de saturations des ailerons de stabilisation en vitesse doit être inférieur à deux par minute,
4. le nombre de saturations des gouvernails en position doit être inférieur à deux par minute,
5. le nombre de saturations des gouvernails en vitesse doit être inférieur à deux par minute,
6. la boucle fermée doit être stable (ses valeurs propres doivent avoir une partie réelle inférieure à  $-r$ ),
7. le correcteur doit être stable (ses valeurs propres doivent avoir une partie réelle inférieure à  $-r$ ),
8. la marge de retard calculée en entrée du correcteur doit être de 0,75 seconde au minimum,
9. l'amplification des mouvements de perturbation en roulis en dessous de la résonance doit être inférieure à 2 dB,
10. l'amplification des mouvements de perturbation en roulis au dessus de la résonance doit être inférieure à 6 dB,
11. le correcteur doit avoir une faible valeur en basses fréquences entre le mouvement de roulis ainsi que le mouvement de lacet et le braquage des ailerons de stabilisation.

*Table B.1 Contraintes imposées à l'asservissement*

## ***II.2 Évaluation pratique des performances et contraintes***

### ***II.2.a Choix du domaine de calcul : temporel ou fréquentiel***

Le calcul de certains critères décrits précédemment, doit résulter d'une simulation. Il est possible de le faire de deux manières différentes, qui induisent deux traitements et interprétations différents, classiques dans le domaine de la tenue à la mer. Il est possible de faire les calculs soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel.

Que ce soit dans le domaine temporel ou fréquentiel, les simulations font toujours appel à un modèle dynamique du navire : sous forme d'état ou de transfert, et à un calcul des perturbations à partir d'un spectre d'état de mer et des fonctions de transfert entre hauteur de houle et mouvements de perturbation : directement dans le cas temporel, à partir du spectre des mouvements de perturbation dans le cas fréquentiel. De plus, dans les deux cas il y a une approximation dans l'influence

de la perturbation : le spectre d'état de mer doit être discrétisé en fréquence pour permettre de calculer un signal temporel, et dans le cas fréquentiel pour calculer le spectre des mouvements réalisés.

Par contre, les deux types de simulation se distinguent dans les trois points suivants.

Les deux types de simulation traitent les saturations différemment. L'occurrence des saturations est un phénomène non-linéaire, qui est en effet pris en compte exactement en simulation temporelle, puisque l'application des efforts de stabilisation dépend de la position effectivement réalisée par les actionneurs, et non pas uniquement de la position demandée par le correcteur. Il est approximé dans la simulation fréquentielle, qui est essentiellement linéaire.

Les composantes du vecteur des mouvements perturbateurs ne sont pas indépendantes les unes des autres (voir III.1.e, partie A) : elles sont liées par des déphasages, qui sont bien respectés dans les simulations temporelles. On peut donc, dans ce cas, simuler correctement l'influence des perturbations de roulis et de lacet, via le correcteur, sur respectivement les mouvements de lacet et de roulis. Par contre, ces déphasages ne sont pas pris en compte dans nos simulations fréquentielles. Nous avons donc pris le parti de simuler l'effet de la houle en ne tenant compte que de la composante en roulis des mouvements perturbateurs, en utilisant uniquement le spectre de puissance de roulis. Ceci correspond à faire l'hypothèse que l'autre couplage, entre la perturbation de lacet et le mouvement de roulis n'est pas prépondérant, et, de fait, il n'est pas simulé (voir figure B.2). Cette hypothèse est clairement une limitation à la simulation fréquentielle, mais nous avons pu observer que dans la plupart des cas, les régulateurs synthétisés par cette approche donnent des résultats d'analyse de simulation temporelles cohérents avec les simulations fréquentielles.

Un dernier point distingue des deux types de simulation : le temps de calcul. La durée de la simulation temporelle nécessaire pour obtenir des résultats statistiques corrects est vingt minutes, ce qui correspond en temps de calcul à cinq minutes. Dans le cas fréquentiel, le temps de calcul est de quelques secondes.

C'est ce dernier argument qui nous a conduit à opter pour le calcul des performances et contraintes par l'approche fréquentielle dans la synthèse des correcteurs. Certes, ce gain de temps sera au détriment de l'exactitude des simulations. Mais, comme signalé plus haut, dans nos essais, seuls quelques cas isolés de correcteurs ont mis en évidence cette limitation. Si une amélioration est absolument nécessaire, il sera toujours possible de changer de méthode de simulation (dans le do-

maine temporel), au détriment du temps de calcul, ou bien d'utiliser un spectre complexe, tenant compte des déphasages.

### **II.2.b Calcul des puissances moyennes du roulis et de la commande**

Nous cherchons ici à calculer les puissances moyennes des signaux de roulis  $\sigma_{\phi,a}$  et de braquage des actionneurs ( $\sigma_a$  pour les ailerons de stabilisation et  $\sigma_\delta$  pour les gouvernails). Nous donnons ici la méthode de calcul générale, puis décrivons notre cas particulier à partir du spectre des mouvements de perturbation et des fonctions de transfert en boucle fermée.

La puissance d'un signal temporel continu  $x(t)$  sur un intervalle donné est définie par (B.4) ; en passant par son spectre  $S_{xx}$  (pour un signal à bande étroite), on obtient<sup>24</sup> (B.5).

$$\sigma_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad (\text{B.4})$$

$$\sigma_x = \left( \int_0^\infty S_{xx}(\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.5})$$

Si nous supposons que les spectres des mouvements stabilisés ainsi que des mouvements des actionneurs sont connus, (B.5) donne directement les informations que nous cherchons. Les spectres sont obtenus directement par (B.6) – pour un signal quelconque  $x(t)$  – qui décrit la transmission du spectre des mouvements de perturbation  $S_{PP}$  (voir le paragraphe III.1.e de la partie A) par une fonction de transfert  $F$ .

$$S_{xx}(\omega) = |F(\omega)|^2 S_{PP}(\omega) \quad (\text{B.6})$$

En utilisant la variable de Laplace  $s$ , on écrira :

$$S_{xx}(s) = |F(s)|^2 S_{PP}(s) \quad (\text{B.7})$$

Les fonctions de transfert nécessaires aux calculs sont facilement accessibles. Le schéma de principe du calcul des performances en boucle fermée est donné à la figure B.2 :  $G$  est le transfert de la dynamique du navire en réponse à ses actionneurs,  $T_a$  la dynamique de braquage des ailerons,  $T_s$  la dynamique des capteurs et  $K$  le correcteur. Dans la suite, le transfert des capteurs sera négligé : on prendra  $T_s(s) = I_2$ .

---

<sup>24</sup> Cette définition est cohérente avec la définition de la transformée de Fourier utilisée dans (A.2)

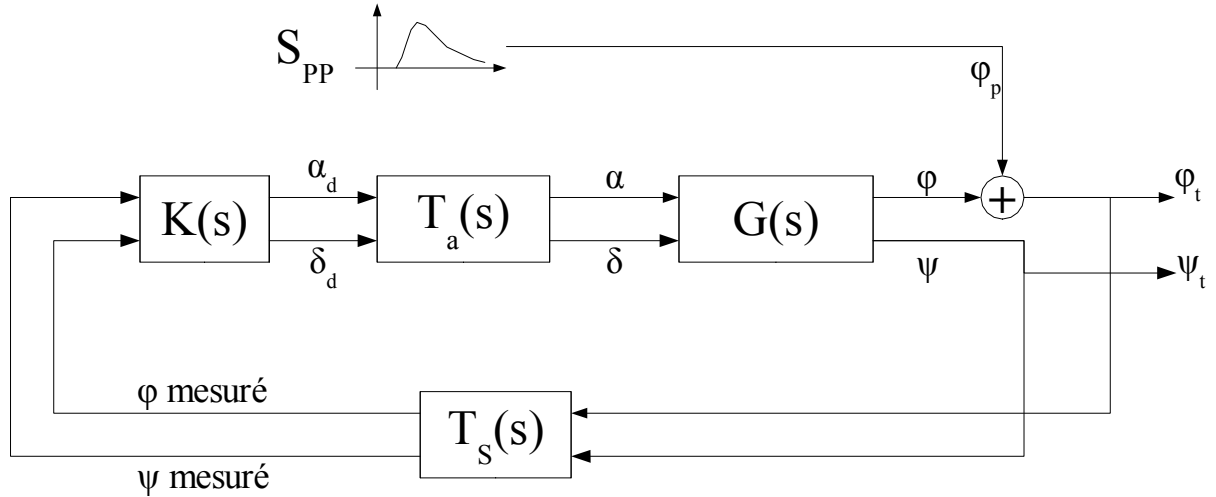


Figure B.2 Schéma de principe du calcul des performances en boucle fermée.  $G$  est le transfert de la dynamique du navire en réponse à ses actionneurs,  $T_a$  la dynamique de braquage des ailerons,  $T_s$  la dynamique des capteurs et  $K$  le correcteur.  $\alpha_d$ ,  $\delta_d$ ,  $\alpha$  et  $\delta$  sont les braquages désirés, et réalisés des ailerons de stabilisation et gouvernails.  $\phi$  et  $\psi$  sont les angles de roulis et de cap du navire soumis à ses actionneurs.  $\phi_p$  est le mouvement de perturbation en roulis du navire induit par la houle.

Les transferts entre la perturbation  $\phi_p$  et les variables qui nous intéressent sont les suivants ( $I$  dénote la matrice unité de taille adéquate) :

- entre la perturbation  $\phi_p$  et la mesure  $\phi_{mesuré}$

$$T_{\phi_p}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} (I + G(s)T_a(s)K(s))^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (B.8)$$

- entre la perturbation  $\phi_p$  et la mesure  $\psi_{mesuré}$

$$T_{\psi_p}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} (I + G(s)T_a(s)K(s))^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (B.9)$$

- entre la perturbation  $\phi_p$  et la commande désirée  $\alpha_d$

$$T_{\alpha_d p}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} K(s) (I + G(s)T_a(s)K(s))^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (B.10)$$

- entre la perturbation  $\phi_p$  et la commande désirée  $\delta_d$

$$T_{\delta_d p}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} K(s) (I + G(s)T_a(s)K(s))^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (B.11)$$

Notons que ces fonctions sont formées à partir respectivement, de  $S(s) = (I + G(s)T_a(s)K(s))^{-1}$ , la sensibilité en sortie, et de  $S_a(s) = K(s)(I + G(s)T_a(s)K(s))^{-1}$ , la sensibilité de la commande désirée, chacune définie par rapport à une perturbation additive sur la sortie. La table B.2 résume ces notations.

Grandeur	Puissance	Spectre	Transfert
Roulis stabilisé	$\sigma_{\varphi,a}$	$S_{\varphi\varphi}$	$T_{\varphi P}(s)$
Cap perturbé par l'influence du roulis	$\sigma_{\psi}$	$S_{\psi\psi}$	$T_{\psi P}(s)$
Braquage désiré des ailerons de stabilisation	$\sigma_{ad}$	$S_{adad}$	$T_{adP}(s)$
Braquage désiré des gouvernails	$\sigma_{\delta d}$	$S_{\delta d\delta d}$	$T_{\delta dP}(s)$

Table B.2 Résumé des notations pour le calcul des performances d'une loi de commande

### II.2.c Répartition de la puissance de stabilisation

On veut répartir l'effort de commande entre ailerons de stabilisation et gouvernails parce qu'on dispose de plusieurs actionneurs qui n'ont pas la même utilité : les gouvernails sont aussi utilisés pour asservir le cap, et il peut être dangereux de trop les utiliser pour la stabilisation du roulis.

Le critère utilisé doit être calculable pour les différents types de lois de commande utilisées : espace d'état, PID... Il ne doit pas dépendre de la loi de commande utilisée ni de sa structure, et ne prendre en compte que les résultats d'une simulation et les caractéristiques de la dynamique du navire. L'approche utilisée est d'estimer la proportion de stabilisation apportée par chaque actionneur pendant une simulation. Il est impossible de séparer les actions des différents actionneurs : elles interviennent au dénominateur des fonctions de transfert (B.10) et (B.11), et il n'y a donc pas de superposition possible.

Il faut donc estimer l'efficacité de chaque actionneur par rapport à l'efficacité globale du système – et ceci indépendamment de la simulation temporelle. Nous avons défini la mesure de l'efficacité d'une gouverne par la valeur maximale du pic de la fonction de transfert entre la position des actionneurs et l'angle de roulis à la pulsation de résonance, pour chacun des actionneurs (voir figure B.3 pour les ailerons de stabilisation par exemple).

Ces valeurs, notées  $\lambda_{\alpha}$  et  $\lambda_{\delta}$ , obéissent à (B.12), avec  $\omega_0$  la pulsation de résonance du navire, et  $i$  valant  $\alpha$  ou  $\delta$ , respectivement, pour désigner les ailerons de stabilisation et les gouvernails.

$$\lambda_i = |G_i(j\omega_0)| \quad (\text{B.12})$$

Nous définissons par conséquent l'indice de répartition  $i_{rép}$  pour une simulation par (B.13), où  $\sigma_{ad}$  et  $\sigma_{\delta d}$  sont respectivement les valeurs RMS des débattements désirés des ailerons de stabilisation et des gouvernails.

$$i_{rép} = \frac{\lambda_{\alpha} \sigma_{\alpha d}}{\lambda_{\alpha} \sigma_{\alpha d} + \lambda_{\delta} \sigma_{\delta d}} \quad (\text{B.13})$$

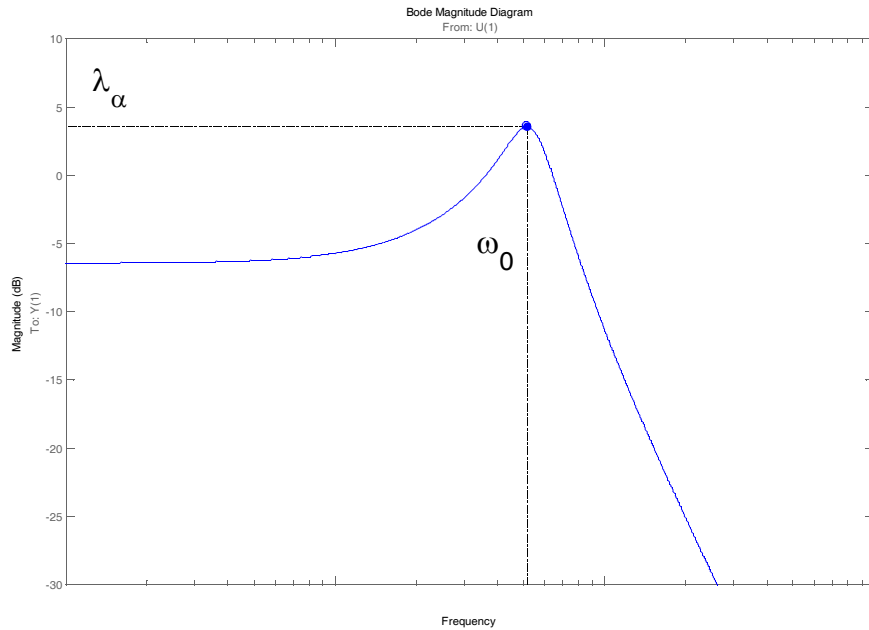


Figure B.3 Efficacité des gouvernes à 25 noeuds. Valeur à la résonance du transfert entre position des ailerons de stabilisation et l'angle de roulis

Les valeurs de  $\lambda_\alpha$  et  $\lambda_\delta$  varient faiblement avec la vitesse, et nous considérons par la suite qu'elles sont constantes. Cet indice donne une idée de l'effort produit pour effectivement stabiliser le navire. L'indice tend vers 1 lorsque les ailerons de stabilisation sont très actifs par rapport aux gouvernails, et inversement tend vers 0 lorsque les gouvernails sont très actifs par rapport aux ailerons de stabilisation.

La valeur optimale de  $i_{rép}$  se situe dans l'intervalle  $[0,7 ; 0,75]$ . Ces valeurs ont été choisies pour éviter que l'utilisation des gouvernails en stabilisation du roulis ne perturbe l'asservissement du cap, en restreignant l'apport de stabilisation des gouvernails à une valeur comprise entre 25% et 30%.

### II.2.d Évaluation des taux de saturation

Rappelons ici la définition de la saturation d'un actionneur donnée au début de ce chapitre : une saturation est définie par l'existence d'un intervalle de temps, quelle que soit sa durée, pendant lequel un actionneur atteint le maximum ou le minimum admissible par son mécanisme<sup>25</sup>. De même, lorsque sa vitesse de déplacement atteint le maximum ou le minimum possible. L'indication qui nous intéresse est définie ici par la fréquence de saturation ; cette indication a pour intérêt d'avoir une signification physique, et d'être facilement visible sur une courbe temporelle.

Malheureusement, l'apparition de saturations est un phénomène non linéaire qui ne peut être étudié dans le cadre linéaire de l'approche fréquentielle que par approximation. Nous supposons ainsi que les actionneurs sont en limite de saturation, *i.e.* ilsaturent peu, et qu'alors l'occurrence d'une saturation ne modifie pas les hypothèses de linéarité.

La fréquence de saturation est alors évaluée de façon statistique : la fréquence  $e^+$  du dépassement d'un seuil  $x_0$  avec une dérivée positive par un signal  $x$ , de spectre donné (dont on note les moments d'ordre zéro  $m_0$  et  $m_2$ ) est définie par (A.9). Pour la rapporter à une durée  $T$ , et pour tenir compte de la symétrie des saturations, nous utilisons la formule (B.14). Pour connaître le nombre de saturations par minutes, nous prenons  $T = 60$  secondes.

$$E = 2 T e^+(x_0) = \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \exp\left(\frac{-1}{2} \frac{x_0^2}{m_0}\right) \quad (\text{B.14})$$

Les calculs des moments sont effectués à partir du spectre de puissance – voir II.2.b, partie A. Rappelons que nous avons fixé comme contrainte le chiffre de deux saturations par minute. Le choix des hauteurs de saturation est effectué à partir des spécifications mécaniques des actionneurs : plusieurs phénomènes limitent l'incidence maximale des ailerons et les efforts qu'ils peuvent transmettre au navire, dont les principaux sont :

- la cavitation intervient lorsque la dépression sur l'aileron est plus forte que la tension superficielle de l'eau : il se forme de la vapeur d'eau. En se condensant, celle-ci provoque un choc sur la carène de l'aileron et fait beaucoup de bruit. Ces effets sont inexistantes à faible vitesse, et deviennent gênants à grande vitesse. Leur apparition dépend de l'incidence.
- au delà d'un certain angle d'incidence, à vitesse constante, un aileron perd rapidement de son efficacité : on dit alors qu'il décroche. Cet angle est quasiment constant avec la vitesse.

<sup>25</sup> En pratique, les mécanismes des ailerons et gouvernails ont une butée logicielle qui permet d'arrêter les mouvements des ailerons avant que les limites mécaniques soient effectivement atteintes.



- la résistance des matériaux est limitée : la torsion maximale admissible par la mèche de l'aileron limite le couple transmissible.

La définition des valeurs numériques est définie lors de la conception du système de stabilisation.

### ***II.2.e Stabilité***

#### ***II.2.e.1 Stabilité nominale***

La stabilité de la boucle fermée et du correcteur doivent être prises en compte car elles ne sont pas nécessairement assurées par la synthèse : par exemple, la commande  $H_\infty$  assure la stabilité de la boucle fermée mais pas du correcteur. De même, un PID quelconque<sup>26</sup> n'assure pas nécessairement la stabilité de la boucle fermée.

La stabilité du correcteur n'est théoriquement pas une nécessité, mais dans l'application au réel, il est nécessaire, pendant des changements de mode de fonctionnement par exemple, de faire tourner le correcteur en dehors de la boucle fermée : cette hypothèse suggère très fortement de synthétiser des correcteurs stables.

Nous voulons donc avoir la stabilité du correcteur et de la boucle fermée. L'expression de cette condition peut prendre des formes différentes selon le type de correcteur. Dans notre cas, nous utiliserons une représentation du correcteur et de la boucle fermée de type espace d'état. Connaître leur stabilité revient à chercher si leurs valeurs propres sont à partie réelle négative. Rappelons que nous imposons en plus (voir §II.1), que les valeurs propres aient une partie réelle inférieure à un seuil négatif  $-r$ .

#### ***II.2.e.2 stabilité robuste***

Le calcul de la loi de commande doit prendre en compte l'installation à bord du navire : le correcteur doit être discrétisé (à une cadence définie), doit supporter les retards dans la mesure et dans l'application (calculs, délais de transmission, synchronisation des mesures). On traduit concrètement ceci par un minimum requis de marge de retard. C'est une mesure de la stabilité robuste de l'asservissement.

---

<sup>26</sup> Cette hypothèse paraît absurde mais elle est importante pour pouvoir effectuer un réglage par optimisation.

La littérature propose plusieurs approches pour évaluer la marge de retard : Chevrel et Sammier [15], Bergeon, Cazaurang et Philippe [9]. Un important travail bibliographique et applicatif a été effectué par Sabine Cluzel dans son rapport de DEA [13] sous la direction de Ph. Chevrel.

Le calcul de la marge de retard dans le cas monovarié est assez direct, et fait appel au calcul des marges de phase  $M_{\phi,i}$ . Les marges de phase sont calculées pour les pulsations correspondant aux points d'intersection (voir [2]) des courbes de gain des sensibilité et sensibilité complémentaire  $S$  et  $T$ . On y définit un gain  $M_i$  (B.15).

$$|S(j\omega_i)| = |T(j\omega_i)| = M_i \quad (\text{B.15})$$

Si on décompose cette relation avec l'expression du transfert de boucle  $L=I+G$ , on trouve (B.16). En supposant que, à la pulsation  $\omega_i$ , on a l'égalité (B.15), la marge de phase est exprimée par (B.17).

$$M_i = \left| \frac{1}{1 + e^{j\phi(\omega_i)}} \right| \quad (\text{B.16})$$

$$M_{\phi,i} = 2 \arcsin \left( \frac{1}{2 M_i} \right) \quad (\text{B.17})$$

La marge de retard correspondante est donc :

$$M_\tau = \min_i \left( \frac{M_{\phi,i}}{\omega_i} \right) \quad (\text{B.18})$$

Les marges de stabilité en SISO ont la même signification en entrée et en sortie, grâce à la commutativité. On remarquera que le calcul de la marge de retard mélange à la fois les valeurs des marges de phase et la pulsation à laquelle cette dernière est calculée. On peut ainsi avoir une marge de phase très correcte, mais correspondant à une marge de retard faible puisque calculée à une pulsation très élevée.

Ces considérations ne s'appliquent qu'au cas SISO. Dans le cas MIMO, elles ne sont plus valides :

- les matrices de transfert ne commutent plus en multiplication (liaison en série) ;
- on ne peut plus isoler une relation entrée/sortie à cause des couplages entre les différents modes.

Il faut donc faire un choix entre le calcul des marges en entrée et en sortie du système. Nous avons décidé de les calculer en sortie, ce qui correspond à étudier l'influence de retards dans le processus de mesure.

Dans notre cas, la marge de retard a été évaluée par analogie avec le cas monovarié, en étudiant les intersections des valeurs singulières des transferts de sensibilité et de sensibilité complémentaire en sortie. Le retard minimal admissible par la boucle est (B.19) sous l'hypothèse (B.20). On note les transferts de sensibilité et de sensibilité mixte en sortie, respectivement  $S$  et  $T$ .

$$M_\tau \geq \min_\omega \left[ \frac{2}{\omega} \arcsin \left( \frac{1}{2 \min(\bar{\sigma}[T(j\omega)], \bar{\sigma}[S(j\omega)])} \right) \right] \quad (\text{B.19})$$

$$\min(\bar{\sigma}[T(j\omega)], \bar{\sigma}[S(j\omega)]) > 0.5 \quad (\text{B.20})$$

Une autre formulation, proposée par Chevrel & Sammier [15], et rapportée par Cluzel [13] est définie ci-après. Elle donne encore une borne inférieure pour des retards variant simultanément. On remarquera qu'il s'agit d'une expression très similaire, prenant en compte non plus la valeur singulière, mais la valeur singulière structurée.

### Théorème

Les retards peuvent varier simultanément en sortie du système sans le déstabiliser à condition qu'ils demeurent dans l'intervalle  $]-r_{\max}, r_{\max}[$  défini par (B.21).

$$r_{\max} = \max \left\{ \inf_{\omega \in \Omega_T} \left[ \frac{2}{\omega} \arcsin \frac{\alpha_1(\omega)}{2} \right]; \inf_{\omega \in \Omega_S} \left[ \frac{2}{\omega} \arcsin \frac{\alpha_2(\omega)}{2} \right] \right\} \quad (\text{B.21})$$

$$\text{avec } \alpha_1(\omega) = \frac{1}{\mu_\Delta(T(j\omega))} \quad \text{et} \quad \alpha_2(\omega) = \frac{1}{\mu_\Delta(S(j\omega))}$$

$$\text{où } \Omega_T = \{\omega / \mu_\Delta(T(j\omega)) > 0.5\} \quad \text{et} \quad \Omega_S = \{\omega / \mu_\Delta(S(j\omega)) > 0.5\}$$

où  $\Delta$  est l'ensemble des matrices ayant la structure définie par (B.22) – avec  $\delta_r$  réel,  $\epsilon_c$  complexe, et  $\Delta_q$  matrice de transfert stable propre. La démonstration est détaillée dans [13] ; elle repose sur l'analyse de la boucle fermée par le théorème du petit gain.

$$\Delta = \left\{ \Delta(s) = \text{diag} \left( \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \epsilon_1 I_{c_1}, \dots, \epsilon_c I_{c_c}, \Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s) \right) \right\} \quad (\text{B.22})$$

Ce critère, plus difficile à mettre en œuvre, n'a pas été utilisé, bien qu'il soit moins conservatif. De plus, le critère (B.19) a directement un intérêt dans la synthèse, puisqu'il permet de former les pondérations dans le cas de la synthèse  $H_\infty$ .

### ***II.3 Optimisation des lois de commande***

Partant du cahier des charges, défini au paragraphe II.1 et détaillé dans II.2, nous décrirons naturellement le problème de synthèse des correcteurs comme un problème d'optimisation à plusieurs objectifs. Les techniques et méthodes de résolution diffèrent du cas mono-objectif : il n'est plus possible d'ordonner toutes les solutions les unes par rapport aux autres, puisque nous avons plusieurs critères pour les classer. Nous rappelons d'abord les principes qui ont mené à l'utilisation de l'optimisation, puis formalisons le problème multi-objectifs, avant de définir quelques outils et concepts nécessaires à la résolution de ce problème.

#### ***II.3.a Méthodologie de synthèse***

L'ingénieur chargé de la synthèse d'une loi de commande utilise un ensemble de règles et de méthodes qui permettent de faire des choix. Le calcul des coefficients d'un correcteur, soit directement dans le cas d'un PID, soit par l'intermédiaire de pondérations constantes : LQ, LQG ou fréquentielles :  $H_\infty$ ,  $H_2$ , QFT, est fonction de ses habitudes et de son expérience.

Une approche analytique a été développée dans le courant des années 90 par S. Boyd et C. Barratt et présentée dans [8]. Elle est basée sur l'observation que beaucoup de concepts utilisés pour régler les lois de commande sont en fait des critères convexes ou quasi-convexes, et que l'application de l'optimisation pour résoudre ces problèmes est accessible par des méthodes numériques puissantes. D'autres approches également pragmatiques ont aussi vu le jour : Duc et Le Mauff [36] ont présenté une méthode de réglage de régulateur de pression de centrale nucléaire par optimisation paramétrique sous contraintes avec une résolution par un algorithme génétique.

Dans le cas de la commande en atténuation de roulis il n'existe pas, à notre connaissance, de méthodologie complète permettant de gérer à la fois plusieurs objectifs – atténuation du roulis et régulation du cap – et plusieurs actionneurs – ailerons de stabilisation et gouvernails.

- Lloyd [37] donne une méthode de réglage de PID monovariante en stabilisation du roulis par les ailerons de stabilisation pour un navire modélisé par des équations différentielles ayant en entrée

les efforts<sup>27</sup> de perturbation et de commande et possédant un servomécanisme induisant un déphasage dans la boucle. Un gain global permet de tenir compte de façon statistique des saturations susceptibles d'être rencontrées sur un état de mer donné<sup>28</sup>. Le réglage est complété par un gain variable en fonction de la vitesse : diminution du gain suivant  $1/V^2$  à partir de 10 noeuds, constant entre 5 et 10 noeuds et nul en dessous de 5 noeuds. Lloyd étudie la robustesse des asservissements ainsi synthétisés par l'analyse du diagramme de Nyquist de la boucle ouverte.

- Katebi *et al.* ont donné une méthode systématique de réglage de PID SISO par optimisation [32]. Les auteurs optimisent la sensibilité en boucle fermée, notamment sa « profondeur » à la résonance du navire. Des contraintes de type fréquentiel contraignent l'espace des solutions.

Dans le cas d'un PID MIMO, ayant en entrée les mesures d'angle de roulis et de cap et en sortie les angles de braquage des ailerons de stabilisation et des gouvernails, il faut régler neuf gains<sup>29</sup>, correspondant à l'asservissement du cap et à la stabilisation du roulis. Une analyse semblable à celle utilisée par Lloyd n'est plus possible, du fait précisément que l'on ne travaille plus en monovariable. L'utilisation de l'optimisation permet de passer outre ce problème, en se donnant un problème suffisamment contraint pour ne pas passer trop de temps à explorer des régions de l'espace des paramètres totalement dénuées d'intérêt.

Nous avons étendu, dans le cadre de cette étude, cette approche à un autre type de lois de commande :  $H_\infty$  dans le cas MIMO. Ce choix a été motivé par le peu de données existantes sur les méthodologies précises de réglage des correcteurs présentées dans la littérature : on trouve en effet peu d'indications sur la façon dont ont été réglés les correcteurs, avec les exceptions notables de [37], [26], et [32]. Cette absence de transparence sur les réglages et les résultats de simulation (et donc sur la comparaison des résultats) de différentes lois de commande soulève les interrogations suivantes : comment justifier le choix de tel ou tel gain ou pondération ? comment comparer deux lois de commande si les critères conduisant au réglage ne sont pas les mêmes ?

Le paragraphe II.5 permet d'apporter une réponse à ces deux questions : le choix des pondérations est le résultat d'une formulation analytique dont les paramètres sont optimisés. L'utilisation d'une méthodologie commune pour régler les différents correcteurs rend la comparaison plus aisée.

---

27 Cette méthodologie peut s'adapter au cas d'un modèle dynamique perturbé en mouvements.

28 c'est en fait le résultat d'un problème d'optimisation sous contrainte...

29 voir page 85.

### ***II.3.b Interprétation du cahier des charges***

Le cahier des charges fait mention dès le départ de la minimisation de grandeurs, sous certaines contraintes. Son écriture sous forme d'un problème d'optimisation est donc naturelle. Nous le présentons ici formellement :

Trouver les variables de conception<sup>30</sup> qui minimisent simultanément :

Objectif 1 - la puissance moyenne du signal de roulis, et

Objectif 2 - la puissance moyenne des signaux de braquage des actionneurs

Sous les contraintes :

Contrainte 1 - les valeurs propres de la boucle fermée doivent avoir une partie réelle inférieure à  $-10^{-5}$ ,

Contrainte 2 - les valeurs propres du correcteur doivent avoir une partie réelle inférieure à  $-10^{-5}$ ,

Contrainte 3 - l'indice de répartition de la commande doit être compris entre 0,70 et 0,75,

Contrainte 4 - le nombre de saturations des ailerons de stabilisation en position doit être inférieur à deux par minute,

Contrainte 5 - le nombre de saturations des ailerons de stabilisation en vitesse doit être inférieur à deux par minute,

Contrainte 6 - le nombre de saturations des gouvernails en position doit être inférieur à deux par minute,

Contrainte 7 - le nombre de saturations des gouvernails en vitesse doit être inférieur à deux par minute,

Contrainte 8 - la marge de retard calculée en entrée du correcteur doit être de 0,75 seconde au minimum,

Contrainte 9 - l'amplification des mouvements de perturbation en roulis en dessous de la résonance doit être inférieure à 2 dB,

Contrainte 10 - l'amplification des mouvements de perturbation en roulis au dessus de la résonance doit être inférieure à 6 dB,

Contrainte 11 - ne pas utiliser les ailerons de stabilisation en basses fréquences.

Le calcul des valeurs numériques des performances et contraintes ont été expliquées dans le paragraphe II.2.

---

<sup>30</sup> les variables de notre problème d'optimisation.

La contrainte numéro 3 sera par la suite transformée en objectif (B.23). C'est un artifice technique qui permet, dans le logiciel utilisé<sup>31</sup>, de ne pas écarter des solutions *a priori* intéressantes, c'est à dire avec des bonnes performances en réduction du roulis ou en utilisation de puissance, mais avec une mauvaise répartition.

$$O_3 = (0.725 - i_{rep})^2 \quad (B.23)$$

Nous verrons que dans le processus de sélection d'une solution définitive, nous rajouterons de nouveau la contrainte correspondante.

### ***II.3.c Notions d'optimisation multi-objectifs***

Le problème d'optimisation ainsi défini est multi-objectifs. L'arsenal classique de l'optimisation n'est plus utilisable car la qualité d'une solution potentielle n'est plus quantifiée par une valeur scalaire mais vectorielle : dans ce cas, il est impossible de classer toutes les solutions les unes par rapport aux autres. Il faut admettre de ne pas trouver une solution unique au problème d'optimisation mais un ensemble de solutions, dont nous extrairons finalement le résultat. Les notions présentées ici constituent une introduction à la problématique ; pour une introduction plus complète, le lecteur pourra se reporter à [8].

On définit une nouvelle relation d'ordre : la domination. Elle correspond dans le cas scalaire à la définition de la supériorité, et prolonge cette notion dans le cas multi-objectifs.

#### **Définition : domination**

On considère N objectifs (à minimiser)  $O_i$  défini sur un espace de variables P.

On dira qu'un point X de P domine un autre point Y de P si, pour chaque objectif  $O_i$ , les valeurs des critères obtenues en X sont meilleures que les valeurs obtenues en Y. Autrement dit :

$$\forall i \in \mathbb{N}, O_i(X) \leq O_i(Y) \text{ et } \exists i_0 \text{ t.q. } O_{i_0}(X) < O_{i_0}(Y) \quad (B.24)$$

Cette notion peut se comprendre en considérant la figure B.4. Le point 3 domine le point 2, mais ne domine pas le point 1, ni le point 4.

---

31 modeFRONTIER, développé par ESTECO – [www.esteco.it](http://www.esteco.it)

Le résultat d'un problème d'optimisation multi-objectifs n'est pas une solution unique, point final de l'algorithme, mais un ensemble de points, appelé frontière de Pareto. Celle-ci est définie comme l'ensemble des points qui ne sont dominés par aucun autre (sur la figure B.4, les points 1, 3 et 4).

Les outils théoriques et numériques habituels en optimisation ne sont plus adaptés. Il faut passer par des méthodes spécifiques à ce type de problèmes<sup>32</sup>. Poursuivant notre souhait d'utiliser des outils existants et éprouvés, nous avons utilisé un logiciel d'optimisation multi-objectifs<sup>33</sup>, dédié à l'optimisation de conception, qui permet l'étude et la résolution de problèmes complexes.

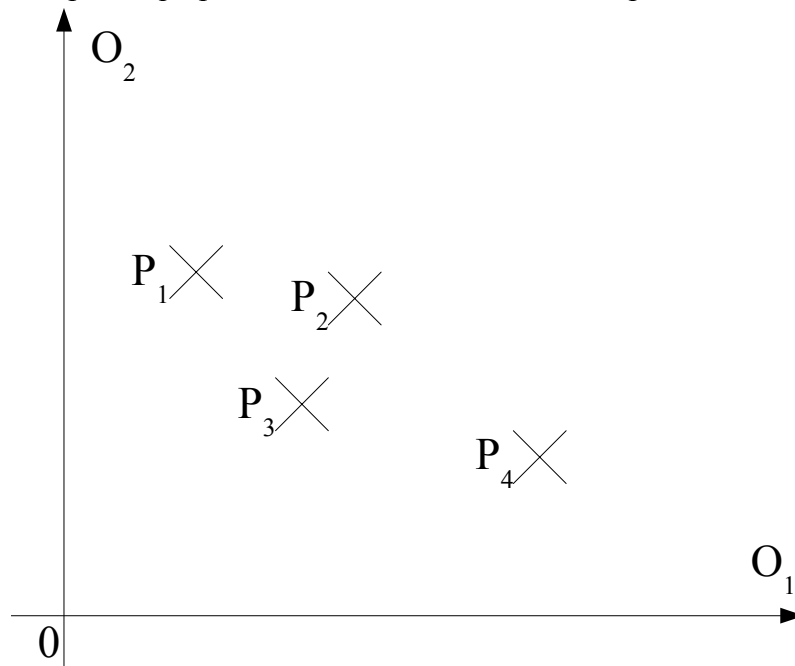


Figure B.4 Figure de la domination. Les objectifs  $O_1$  et  $O_2$  sont à minimiser. Les points  $P_1$ ,  $P_3$  et  $P_4$  forment un sous-ensemble de la frontière de Pareto. Le point  $P_2$  est dominé par  $P_3$ .

La résolution de problèmes multi-objectifs peut être abordée par différents algorithmes maintenant répandus : méthodes d'évolution, algorithmes génétiques, recuit simulé,... Ils ont en commun de tous faire appel à la génération de nombres aléatoires pour l'exploration de l'espace des variables.

Les algorithmes génétiques sont assez populaires pour la résolution de problèmes complexes, et pour lesquels on manque de solution plus simple. Ils sont basés sur l'analogie avec la théorie de l'évolution, toutes mesures gardées : une *population* d'*individus*, représentant des solutions potentielles, évolue dans le temps, à chaque *génération*. Chaque individu est représenté par ses *gènes*, qui

<sup>32</sup> C'est aussi parce que des méthodes existent pour « résoudre » ces problèmes qu'on se permet de définir un problème de synthèse de cette façon.

<sup>33</sup> voir la note 31, page 82.



sont un codage particulier des variables du problème d'optimisation. À chaque itération (*génération*), l'algorithme manipule les gènes des individus d'abord par *sélection* et *reproduction* (le « *cross-over* » permet de mélanger les gènes), puis par *sélection* et *mutations*. Ces deux étapes successives font intervenir le hasard. L'arrêt de l'algorithme n'est pas défini par la convergence vers l'ensemble solution, mais par le dépassement du nombre maximal de générations. Le lecteur consultera [47] pour une introduction aux applications de l'optimisation multi-objectifs en ingénierie, et [25] pour plus de précisions sur l'algorithme implanté dans *modeFRONTIER* et utilisé ici.

Le principe de l'optimisation et le type même du problème, appellent quelques remarques : on ne sait pas si le problème a une solution, plusieurs, ou aucune ; de plus la notion de convergence doit être comprise au sens de convergence vers un ensemble et non vers un point unique. Il faut donc ensuite choisir une seule solution dans cet ensemble. Pour cela, nous utilisons l'algorithme suivant :

- la solution retenue est un point de la frontière de Pareto,
- qui a la meilleure performance en stabilisation (objectif 1),
- et dont la répartition de commande se situe dans l'intervalle fixé.

L'objectif 2 n'entre pas en compte dans le choix de la solution puisque, sur la frontière, nous sommes assurés d'avoir les meilleures performances possibles pour une réduction de la puissance du roulis donnée. De plus, l'objectif 3 est redevenu une contrainte.

La mise sous forme multi-objectifs est naturelle dans beaucoup de domaines, car en général les critères de qualité sont antagonistes. Exprimer le problème sous cette forme permet de retarder le choix pour ne décider de la solution finale qu'en ayant exploré l'ensemble des solutions acceptables. En automatique, on cherche souvent à minimiser l'effet d'une perturbation sur une sortie tout en gardant la puissance de la commande raisonnable : c'est naturellement l'expression d'un problème d'optimisation multi-objectifs. Il est résolu, par exemple dans le cas LQG ajoutant un paramètre de pondération permettant d'obtenir une solution unique, et non un ensemble.

Remarquons enfin que l'optimisation est basée sur un algorithme d'évolution, pour lequel l'ensemble (la population) de départ joue un rôle important dans la précision et la rapidité de la convergence. Il existe ainsi une certaine variabilité dans les résultats en fonction de la répartition et de l'amplitude de la population initiale choisie. Cela se retrouvera en particulier dans l'optimisation

des correcteurs de type PID où l'on dispose de neuf coefficients pour trois objectifs. L'optimisation des correcteurs  $H_\infty$  sera plus simple car la forme générale des correcteurs sera déjà en grande partie fixée par les pondérations.

## **II.4 Application à la synthèse des correcteurs PID**

Le correcteur de type PID que nous avons utilisé est de la forme (B.25). Il utilise les mesures de roulis  $\varphi$ , de vitesse de roulis  $p$ , et d'accélération en roulis  $\dot{p}$ , et de vitesse de lacet  $r$  et de cap  $\psi$ . Les signaux de sortie sont le braquage désiré des ailerons de stabilisation  $\alpha_d$  et des gouvernails  $\delta_d$ .

$$\begin{cases} \alpha_d = K_{\alpha 1} \varphi + K_{\alpha 2} p + K_{\alpha 3} \dot{p} \\ \delta_d = K_{\delta 1} \varphi + K_{\delta 2} p + K_{\delta 3} \dot{p} + K_{\psi 1} \psi + K_{\psi 2} r + K_{\psi 0} \int \psi dt \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

Ses neuf paramètres sont les suivants :

- $K_{\alpha 1}, K_{\alpha 2}, K_{\alpha 3}$  : influence des mouvements de roulis sur le braquage des ailerons de stabilisation,
- $K_{\delta 1}, K_{\delta 2}, K_{\delta 3}$  : influence des mouvements de roulis sur le braquage des gouvernails,
- $K_{\psi 0}, K_{\psi 1}, K_{\psi 2}$  : influence des mouvements de lacet et du cap sur le braquage des gouvernails.

On remarquera que l'influence du lacet sur le braquage des ailerons de gouvernail est nul. L'effet des ailerons de stabilisation sur le lacet est effectivement faible, et il est quasiment impossible de commander le cap avec ceux-ci. De plus, nous avons ici supposé que le roulis ne comporte pas de composante en basse fréquence ; ceci est en général réalisé par un filtrage de la gîte.

L'objectif du réglage est de déterminer une valeur correcte pour chacun des neuf coefficients de la loi de commande (B.25). Tous ne sont pas mis en recherche pendant l'optimisation : les coefficients  $K_{\psi 0}$ ,  $K_{\psi 1}$ , et  $K_{\psi 2}$ , qui définissent l'asservissement du cap, sont réglés à l'avance par placement de pôles, voir [23].

Les six autres coefficients sont mis en recherche dans l'optimisation. Nous n'avons pas fait d'hypothèse sur leur signe : il peuvent être positifs ou négatifs. Leurs valeurs extrémales ont été fixées à -10 et +10 pour les besoins du logiciel d'optimisation utilisé ; dans la pratique, et dans les résultats, ces limites sont acceptables.

Le calcul d'un correcteur à un point de fonctionnement nécessite le calcul des performances de 1.000 à 2.500 lois de commande. Le temps de calcul n'est pas négligeable, voir table B.3 : un ra-

pide calcul nous donne dans le premier cas 1 heure et 20 minutes et dans le second environ 3 heures et 30 minutes, avec un ordinateur raisonnablement rapide actuellement<sup>34</sup>.

Opération	Durée moyenne
Calcul d'un correcteur	immédiat
Calcul des performances correspondantes	5 secondes
<b>Total</b> (1.200 évaluations de correcteurs)	Environ 1 heure 20 minutes
<b>Total</b> (2.500 évaluations de correcteurs)	Environ 3 heures et 30 minutes

*Table B.3 Temps de calcul nécessaires à l'optimisation d'un correcteur PID*

Ce type de loi de commande sera utilisé au paragraphe II.6.

## ***II.5 Application à la synthèse des correcteurs $H_\infty$***

Un correcteur de type  $H_\infty$  est le résultat d'une optimisation.

À partir du modèle dynamique, on construit un modèle augmenté en rajoutant des pondérations fréquentielles sur les entrées et les sorties. Notons qu'en fait les pondérations sont les paramètres de synthèse. Le correcteur est ensuite obtenu en cherchant à minimiser la norme du transfert entre certaines entrées (les perturbations) et certaines sorties (les sorties à commander).

En supposant que les pondérations et le modèle sont connus, le calcul peut être effectué par une méthode classique : utiliser les factorisations copremières de fractions rationnelles représentant le système ; l'algorithme développé par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis (DGKF, [19]) ; ou bien utiliser la résolution par les LMI [29], [24].

Cependant, le réglage des pondérations n'est pas simple. On décide de l'allure des pondérations à partir de l'étude du cahier des charges, et certains paramètres bien choisis permettent de les ajuster. On réduit ainsi le choix des pondérations à la détermination de trois paramètres, que nous détaillons au paragraphe II.5.b. Comme pour le cas du réglage des PID, voir au paragraphe II.4, nous utilisons le cadre de l'optimisation multi-objectifs pour les régler.

Nous avons utilisé dans nos travaux les méthodes de synthèse  $H_\infty$  par l'algorithme du DGKF et par l'utilisation des LMI. Toutes deux sont basées sur l'écriture du problème sous forme standard, que nous présentons au paragraphe II.5.a. L'algorithme DGKF a des hypothèses fortes qui ne sont pas compréhensibles aisément, et qui peuvent obliger à des artifices de calcul dans la construction

---

34 Pentium III à 800 MHz, sous Windows 2000.

du modèle standard, mais le calcul d'un régulateur par cette méthode est rapide. En revanche, les hypothèses utilisées dans le cas LMI sont plus faibles<sup>35</sup> et permettent de traiter des cas non-réguliers pour l'algorithme DGKF. Néanmoins, les calculs sont parfois assez longs : un calcul de correcteur pour un modèle complexe (modèle standard avec cinq entrées, huit sorties et vingt-quatre états) prendra parfois dix minutes, là où l'algorithme DGKF prendra quelques secondes.

Le problème de la synthèse  $H_\infty$  est posé sous la forme de sensibilité mixte, qui utilise à la fois la sensibilité  $S$ , la sensibilité complémentaire  $T$  et la sensibilité de commande  $KS$ . Le lecteur trouvera des références sur la synthèse  $H_\infty$  dans les ouvrages de référence suivants : [2] et [18].

### II.5.a Modèle standard

Nous rappelons ici le modèle dynamique du chapitre IV, page 51. En notation d'état, nous écrivons (B.26) avec (B.27). Rappelons que nous nous plaçons à un point de fonctionnement donné, et que par conséquent, la vitesse  $U_0$  est constante, l'angle de rencontre est constant  $\psi_e$ , et l'état de mer est constant. Le modèle dynamique considéré est donc invariant.

$$\dot{\mathbf{x}} = A(U_0)\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (\text{B.26})$$

$$x_P = \int_{-\infty}^t K_X(U_0, \psi_e, t-\tau)\xi(\tau) d\tau \quad (\text{B.27})$$

Le point de départ de la synthèse  $H_\infty$  est la définition d'un modèle de synthèse appelé modèle standard<sup>36</sup> (B.28). Il est calculé à partir du modèle dynamique à commander  $G$ , composé de la dynamique du navire et des actionneurs (B.26) auquel nous rajoutons une équation de sortie indiquant que les signaux mesurés sont  $\psi_e$  et  $p$ , et des pondérations. Si celles-ci sont statiques, il s'agit uniquement de gains, donc la taille de l'état du modèle standard est celle du système (B.26). Dans le cas où l'on considère des pondérations dynamiques, le cas le plus général, l'état du modèle standard contient à la fois les états du modèle dynamique et les états des pondérations. Nous noterons  $x$  l'état du système augmenté.

Pour notre problème de la stabilisation du roulis d'un navire, le schéma bloc du système standard est représenté à la figure B.5. Les pondérations sont notées  $W_{ij}$ , et sont des fonctions de transfert monovariabiles, dont la construction est détaillée au paragraphe II.5.b.

---

<sup>35</sup> C'est donc une méthode plus forte.

<sup>36</sup> Un exposé clair de l'utilisation de modèle standard pour la synthèse de lois de commande est fait dans [2].

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

Les entrées et sorties du modèle standard ne correspondent plus uniquement à celles du modèle dynamique (B.26). Le modèle standard contient des sorties à commander  $z$  et des entrées de perturbation  $w$ , en plus des sorties de mesure (signaux issus des capteurs)  $y$  et des entrées de commande  $u$ . Ces nouveaux signaux sont détaillés dans les tables B.4 et B.5. Notons que les signaux  $z$  et  $y$  ne sont pas forcément indépendants, car des signaux mesurés peuvent faire partie des signaux à commander.

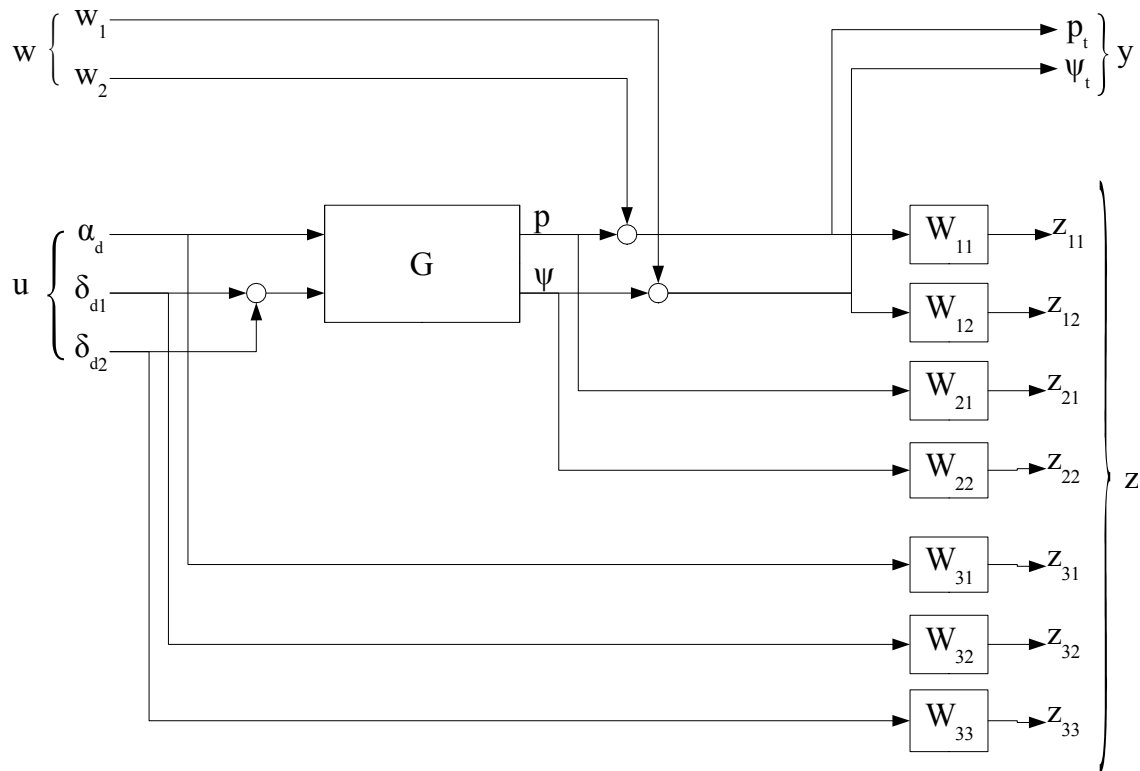


Figure B.5 Schéma de principe de la synthèse  $H_\infty$

Entrées	
Commande $u$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\alpha_d</math>, braquage demandé des ailerons de stabilisation,</li> <li>• <math>\delta_{d1}</math>, braquage demandé des gouvernails pour la stabilisation du roulis,</li> <li>• <math>\delta_{d2}</math> braquage demandé des gouvernails pour l'asservissement du cap.</li> </ul>

Entrées	
Perturbation $w$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>w_1</math>, mouvements de perturbation en roulis,</li> <li>• <math>w_2</math>, mouvements de perturbation en cap.</li> </ul>

Table B.4 Détail des entrées du modèle standard

Notons que les signaux de perturbation  $w_1$  et  $w_2$  sont des signaux de perturbation du modèle standard, utilisés dans la synthèse. Ils ne représentent pas forcément des signaux réels, et ne sont pas contraints à respecter (B.27).

Sorties	
Mesures $y$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>p</math>, vitesse de roulis perturbée,</li> <li>• <math>\psi</math>, cap perturbé.</li> </ul>
Sorties à commander $z$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>z_{11}</math>, vitesse de roulis perturbée pondérée,</li> <li>• <math>z_{12}</math>, cap perturbé pondéré,</li> <li>• <math>z_{21}</math>, vitesse de roulis pondéré,</li> <li>• <math>z_{22}</math>, cap pondéré,</li> <li>• <math>z_{31}</math>, commande des ailerons de stabilisation pondérée,</li> <li>• <math>z_{32}</math>, commande des gouvernails en anti-roulis pondérée,</li> <li>• <math>z_{33}</math>, commande des gouvernails en garde-cap pondérée.</li> </ul>

Table B.5 Détail des sorties du modèle standard

Nous distinguons entre l'usage des gouvernails pour stabiliser le roulis ( $\delta_1$ ) et pour asservir le cap ( $\delta_2$ ). Nous supposons que ces deux actions sont dans des domaines de fréquence séparés<sup>37</sup>, la première active autour de la résonance du navire en roulis, vers 0.1Hz, et l'autre active à plus basse fréquence, autour de 0,01Hz. Pour séparer efficacement les deux effets, nous imposons des gabarits fréquentiels différents, voir §II.5.b. Cette distinction est un artifice de synthèse, et les deux sorties  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont ensuite sommées dans la construction finale du régulateur, voir figure B.5, et donc dans l'application en simulation.

Le modèle standard de notre problème est totalement décrit une fois les pondérations connues. Il est représenté soit par le modèle (B.28), soit par la matrice  $P$  (B.29), dite matrice système.

<sup>37</sup> Ce qui est faux en pratique quand la période de la houle de rencontre est très grande. Ces conditions existent à grande vitesse, pour des faibles angles de rencontre. Dans ce cas il faut changer de modèle et de stratégie de commande. Nous n'avons pas traité ce cas ici.

$$P = \begin{pmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

### II.5.b Description des pondérations

L'objectif de la synthèse d'un correcteur  $H_\infty$  est le suivant : nous cherchons un correcteur, tel que pour un nombre réel positif  $\gamma$  donné et pour des pondérations  $W_{ij}$  données, l'inégalité (B.30) soit vérifiée.

$$\left\| \begin{pmatrix} W_1 S \\ W_2 T \\ W_3 K S \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (\text{B.30})$$

Les matrices de pondérations sont définies comme suit :

$W_1 = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{12} \end{pmatrix}$	$W_2 = \begin{pmatrix} W_{21} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix}$	$W_3 = \begin{pmatrix} W_{31} & 0 & 0 \\ 0 & W_{32} & 0 \\ 0 & 0 & W_{33} \end{pmatrix}$
--	--	--

En prenant pour valeur objectif  $\gamma=1$ , avoir calculé un correcteur implique que la boucle fermée par ce correcteur satisfait des gabarits, exprimés par les pondérations  $W_{ij}$ . Ces gabarits peuvent donc être utilisés pour exprimer les contraintes et objectifs du cahier des charges. Nous détaillons ces calculs dans les paragraphes qui suivent.

#### II.5.b.1 Pondération de sensibilité en roulis

La pondération de sensibilité en roulis fixe une partie des performances de la boucle fermée en présence du correcteur : si ce gabarit est respecté, la sensibilité en roulis de la boucle fermée aura la forme voulue. Elle doit permettre de limiter l'amplification en dessous de la résonance à 2 dB, et l'amplification au dessus de la résonance à 6 dB. La forme (B.31) a été choisie pour respecter ces contraintes.

$$W_{11}(s) = K \frac{(s+b_1)(s+b_2)(s+b_3)}{(s+a_1)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)} \quad (\text{B.31})$$

Seul l'amortissement  $z$  est un paramètre réglable, qui permet de faire varier la profondeur de la sensibilité, voir figure B.6. Les autres paramètres –  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $a_1$  et  $\omega$  – sont fixes, et servent à respecter les contraintes. La valeur de  $\omega$  est fixé à la pulsation de résonance du navire. Ils servent aussi à affiner la forme de la pondération : on remarquera la forme de la sensibilité au dessus de la résonance. L'allure de l'inverse de la pondération, pour plusieurs valeurs de  $z$ , est présentée à la figure B.6.

La définition de cette pondération présente une limitation, puisque seul un paramètre est variant dans l'optimisation, nous le constaterons plus loin. Le paramètre  $\omega$  pourrait, par exemple, permettre l'adaptation à une variation du contenu fréquentiel de la perturbation.

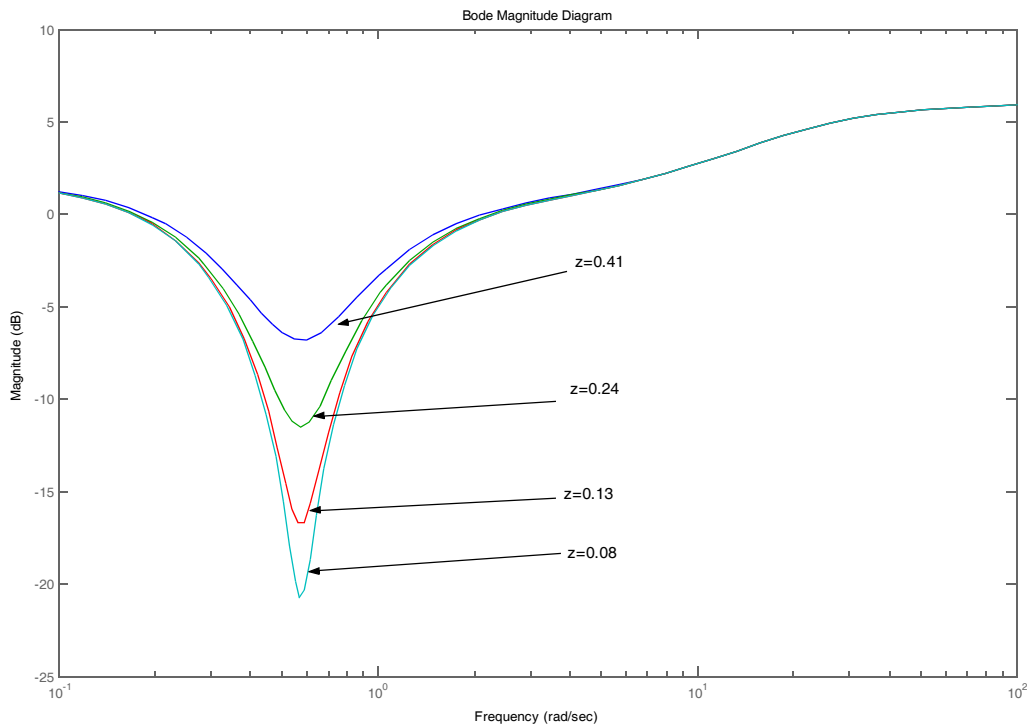


Figure B.6 Inverse de la pondération de sensibilité en roulis



### II.5.b.2 Sensibilité en lacet

Les ordres de changement de cap issus de la passerelle sont des signaux de consigne basse fréquence. Ils seront respectés en imposant à la sensibilité en sortie, pour le mouvement de lacet, d'avoir une faible amplification en basses fréquences : -20dB, et une bande passante proche de la bande passante obtenue avec un correcteur PID (voir paragraphe II.4), pour pouvoir comparer les simulations temporelles. La pondération utilisée est (B.32), et son inverse est tracée à la figure B.7.

$$W_{12}(s) = \left[ K \frac{\frac{K_{hf}}{K_{bf}} \frac{1}{\omega_{\psi_c}} s + 1}{\frac{1}{\omega_{\psi_c}} s + 1} \right]^{-1} \quad (\text{B.32})$$

Pour cette pondération, les paramètres sont tous fixes. Ils n'entreront pas dans le processus d'optimisation de la loi de commande.

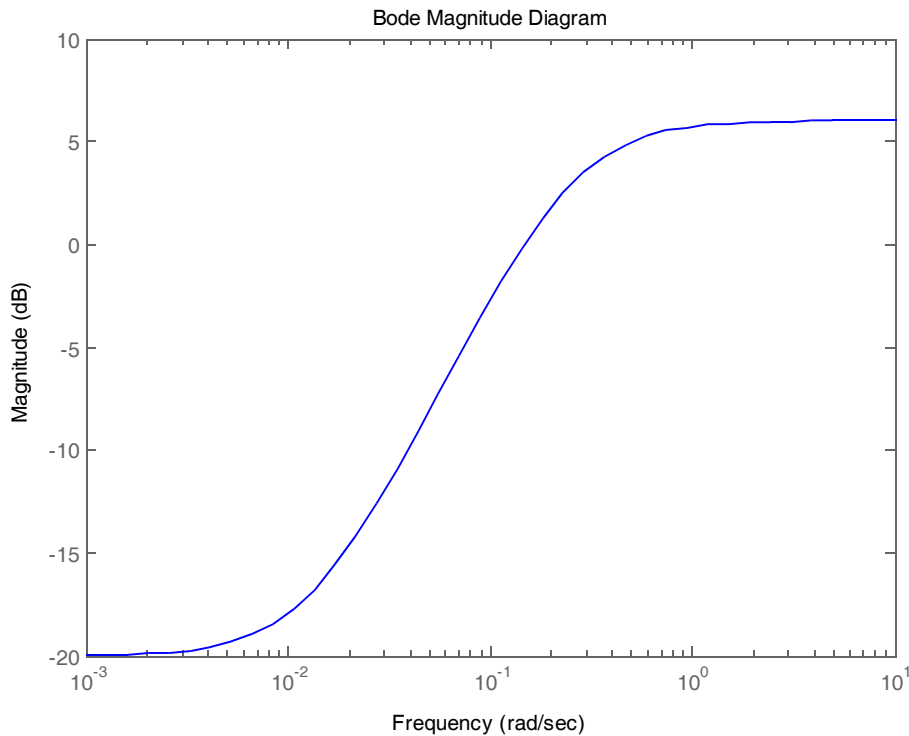


Figure B.7 Inverse de la pondération de sensibilité en cap

### II.5.b.3 Sensibilités complémentaires

L'utilisation de la sensibilité complémentaire, le transfert entre les perturbations  $w$  et les sorties du modèle dynamique  $p$  et  $\varphi$ , permet d'imposer des conditions de stabilité robuste : le gabarit permet de diminuer le gain du correcteur en hautes fréquences, dans un domaine de fréquences où le modèle dynamique du navire est douteux. Mais nous pouvons préciser son utilisation par le respect de la contrainte que nous avons fixée sur la marge de retard. En effet, la marge de retard est déterminée par les points d'intersection entre les tracés des valeurs singulières de sensibilité et de sensibilité complémentaire, voir §II.2.e.2. En imposant des gabarits adéquats à la sensibilité complémentaire – puisque les sensibilités sont déjà écrites – la marge de retard est minorée par une valeur déterminée et certaine. Cette utilisation des pondérations est décrite dans [9].

En pratique, cette condition s'est avérée très conservatrice : la marge de retard obtenue en fixant un minimum de 0,75 seconde était en général supérieure à 2,5 secondes. Le gain correspondant en robustesse s'accompagne d'une perte conséquente dans les performances accessibles : le gabarit de sensibilité en roulis ne pouvait plus être respecté. Nous avons donc utilisé dans la construction des gabarits de sensibilité complémentaire la valeur minimale de 0,5 seconde, pour obtenir une marge de retard d'environ 1,2 seconde, suivant les cas. Cette valeur est largement supérieure à la spécification du cahier des charges (0,75 seconde), mais nous l'avons gardée car nous ne maîtrisons pas parfaitement la valeur effective de la marge de retard du système en boucle fermée.

La pondération choisie (B.33) est tracée à la figure B.8.

$$W_{21}(s) = \left[ K_{bf} \left( \frac{\frac{1}{\omega_1} s + 1}{\frac{1}{\omega_{rc}} s + 1} \right)^{n_{rc}} \right]^{-1} \quad (\text{B.33})$$

avec  $\omega_1 = \omega_{rc} \left( \frac{K_{bf}}{K_{hf}} \right)^{1/n_{rc}}$ . Nous utiliserons  $W_{22} = W_{21}$ . Ici aussi tous les paramètres sont fixés

et n'entrent donc pas dans le processus d'optimisation.

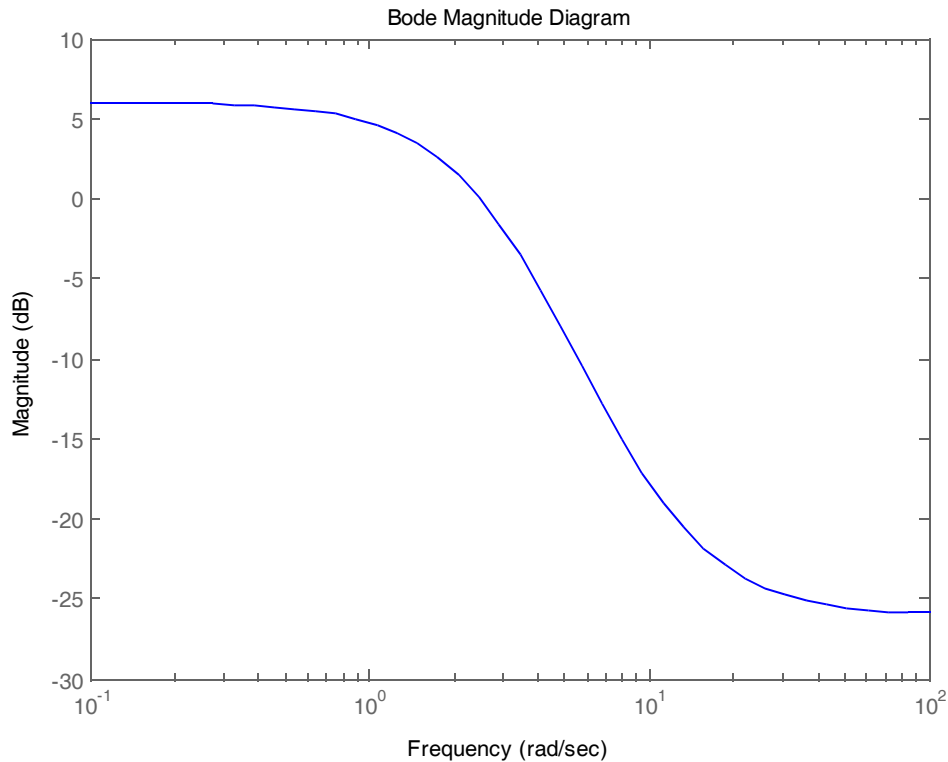


Figure B.8 Inverse des pondérations de sensibilité complémentaire

#### II.5.b.4 Sensibilités de la commande

L'objectif des sensibilités de la commande est de permettre de contrôler le niveau d'utilisation des actionneurs, et la plage de fréquence où ils seront actifs. Nous avons précédemment distingué trois actionneurs différents : les ailerons de stabilisation, les gouvernails utilisés dans la stabilisation du roulis, et dans l'asservissement du cap. L'objectif est de pouvoir séparer l'activité de stabilisation et l'activité d'asservissement du cap.

Nous voulons satisfaire la contrainte 11, qui impose de ne pas utiliser les ailerons de stabilisation dans l'asservissement de la gîte, ni dans l'asservissement du cap. Puisque ces deux perturbations (gîte et cap) ont des actions uniquement en basses fréquences, nous imposons par le gabarit  $W_{3l}$  (B.34), voir figure B.9, de ne pas agiter les ailerons de stabilisation en basses fréquences. Nous imposons aussi de ne pas les agiter en hautes fréquences, car le navire que nous considérons<sup>38</sup> n'a pas de mouvement de fréquence supérieure à 5 Hz ; cette contrainte est commune aux autres pondé-

---

38 Dans d'autres cas, notamment des navires rapides, cette hypothèse ne tient plus.

rations de la commande. Dans la pondération  $W_{31}$ , le seul paramètre réglable est sa valeur minimale  $a_M$  (voir figure B.9).

$$W_{31}(s) = \left[ a_M \frac{s + \omega_{ai}}{s + k_{as} \omega_{ai}} \frac{s + \omega_{as}}{k_{as} s + \omega_{as}} \right]^{-1} \quad (\text{B.34})$$

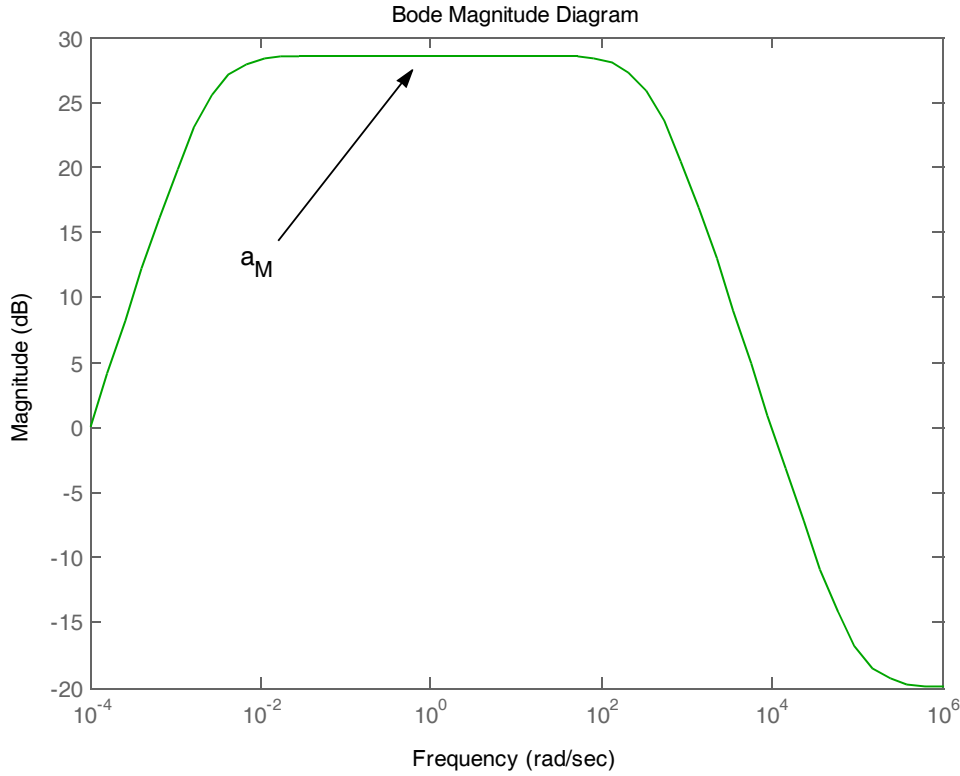


Figure B.9 Inverse de la pondération en sensibilité des ailerons de stabilisation

La pondération  $W_{32}$  sur l'usage des gouvernails (B.35), voir figure B.10, en stabilisation obéit aux mêmes contraintes que  $W_{31}$  : pas d'agitation en basse ni en hautes fréquences, et une valeur minimale réglable,  $d_{M1}$ .

$$W_{32}(s) = \left[ d_{M1} \frac{s + \omega_{dli}}{s + k_{agl} \omega_{dli}} \frac{s + \omega_{dls}}{k_{agl} s + \omega_{dls}} \right]^{-1} \quad (\text{B.35})$$

Finalement, la pondération  $W_{33}$  sur l'usage des gouvernails (B.36), voir figure B.11, en asservissement du cap admet seulement les mouvements en basse fréquence des gouvernails. La valeur minimale  $d_{M2}$  de cette pondération est, elle, fixée.

$$W_{33}(s) = \left[ d_{M2} \frac{s + \omega_{d2s}}{k_{ag2}s + \omega_{d2s}} \right]^{-1} \quad (\text{B.36})$$

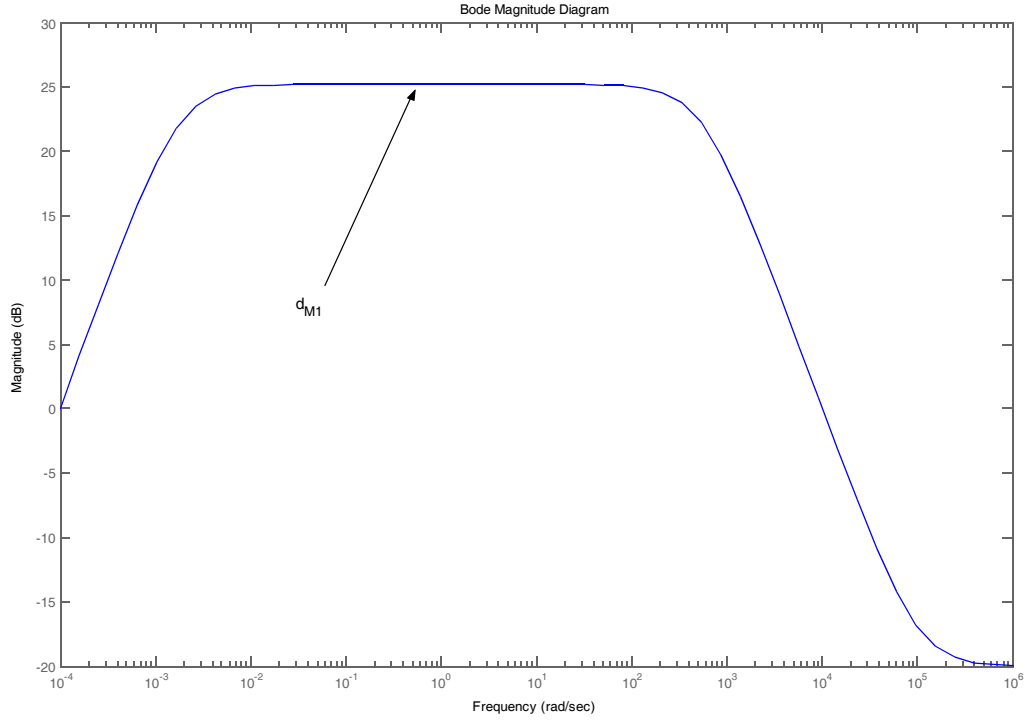


Figure B.10 Inverse de la pondération de sensibilité des gouvernails utilisés en stabilisation du roulis

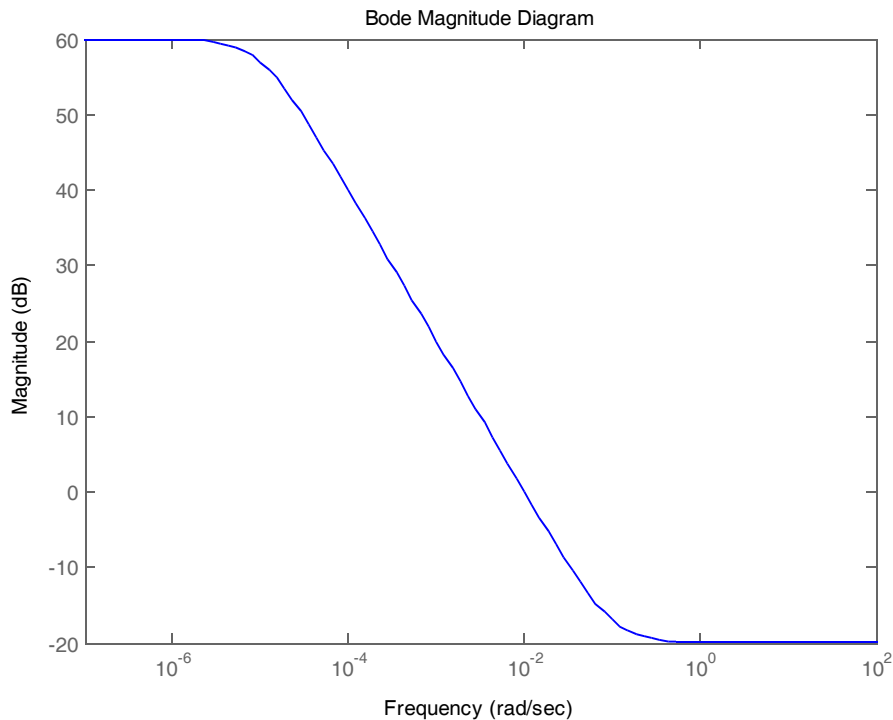


Figure B.11 Inverse de la pondération de sensibilité des gouvernails utilisés pour l'asservissement du cap

### II.5.c Aspects pratiques de la synthèse $H_\infty$

Pour déterminer une valeur optimale des paramètres régissant les pondérations, nous avons utilisé deux méthodes de recherche : un algorithme génétique (voir [57]), aussi utilisé pour le réglage des correcteurs de type PID, et une exploration systématique de l'espace des paramètres (une forme de crible). Ce sont deux manières différentes pour rechercher des correcteurs, mais le concept central est d'exprimer le problème sous forme multi-objectifs. Une contrainte est rajoutée dans l'optimisation, pour s'assurer que les correcteurs seront utilisables : la valeur de  $\gamma$  doit rester inférieure à 1,25.

Comme dans le cas des PID, nous donnons une estimation du temps de calcul d'un correcteur, pour un point de fonctionnement : pour être précis, il faut calculer les performances d'environ 1000 lois de commande. Le temps de calcul n'est pas négligeable, voir table B.6 : un rapide calcul mène, pour un seul point de fonctionnement, à environ 2 heures et 30 minutes, avec un ordinateur raisonnablement rapide actuellement<sup>39</sup>.

<sup>39</sup> Pentium III à 800 MHz, sous MSWindows 2000.

Opération	Durée moyenne
Calcul du correcteur	environ 4 secondes
Calcul des performances	5 secondes
<b>Total</b> (1.000 évaluations de correcteurs)	Environ 2 heures 30 minutes

*Table B.6 Temps de calcul nécessaires à l'optimisation d'un correcteur  $H_\infty$*

Nous avons utilisé cette méthode au paragraphe II.6, où nous présentons les résultats obtenus.

## **II.6 Simulations et comparaisons**

Les méthodes des paragraphes ci-dessus ont permis de calculer des régulateurs pour des points de fonctionnement définis par la vitesse  $U_0$ , l'angle de rencontre  $\psi_e$  et par l'état de mer  $EM$ . Nous avons ensuite comparés ceux-ci en simulation. Les paragraphes suivants présentent les résultats obtenus.

### **II.6.a Conditions de simulation**

Nous avons considéré, dans ce rapport, un navire de type frégate, de 120 mètres de long et de 3000 tonnes de déplacement environ. Les coefficients de son modèle dynamique et des perturbations ont été calculés par un code numérique. Nous n'en donnons pas les valeurs pour des raisons de confidentialité. La gamme de vitesse dans laquelle il peut opérer englobe les cas que nous étudions (de 10 à 25 noeuds).

Les valeurs des paramètres  $T_P$  et  $H_S$  (voir §II.2), utilisés pour modéliser les états de mer 4, 5 et 6 sont résumés dans la table B.7. Les valeurs choisies pour l'état de mer 4 correspondent à une description pessimiste. Dans les autres cas elles sont classiques.

État de mer	$T_P$	$H_S$
4	9	2.5
5	10	3.25
6	12	5

*Table B.7 Définition des paramètres pour les états de mer*

### II.6.b Points de fonctionnement

Nous avons donc limité le nombre de points de fonctionnements considérés aux listes suivantes. Elles sont néanmoins suffisantes pour nous permettre de tirer des enseignements quant à la nécessité d'adapter les correcteurs en fonction du point de fonctionnement.

La table B.8 présente la liste des points de fonctionnement auxquels un correcteur de type PID, voir §II.4, a été calculé ; la liste analogue pour les correcteurs de type  $H_\infty$ , voir §II.5, est donnée dans la table B.9.

Vitesse $U_0$	Angle de rencontre $\psi_e$	État de mer $EM$
25	15	5
25	30	5
25	45	5
25	60	5
25	75	5
25	90	5
25	105	5
25	120	5
25	135	5
25	150	5
25	165	5
10	90	5
15	90	5
20	90	5
25	90	4
25	90	6

Table B.8 Liste des points de fonctionnement pour lesquels un correcteur PID a été optimisé. Les cases grisées mettent en évidence la variation des paramètres.



Vitesse $U_0$	Angle de rencontre $\psi_e$	État de mer $EM$
10	90	5
15	90	5
20	90	5
25	90	5
25	75	5
25	105	5
25	90	4
25	90	6

Table B.9 Liste des points de fonctionnement pour lesquels un correcteur  $H_\infty$  a été optimisé. Les cases grisées mettent en évidence la variation des paramètres.

La liste des cas de calcul en angle de rencontre dans le cas  $H_\infty$  est volontairement réduite : les trois paramètres de réglage définis ne permettent de faire évoluer que la profondeur du puits de la pondération de sensibilité en roulis, et pas sa largeur ou son centrage fréquentiel. Or le spectre de roulis sur la houle varie en fonction de l'angle de rencontre : sa pulsation de pic change, sa largeur de bande change. Nous avons donc décidé de limiter les calculs dans ce cas.

### II.6.c Comparaison des correcteurs

La comparaison des correcteurs est basée sur des simulations temporelles. Le caractère aléatoire de la houle – par le choix de déphasages entre composantes, voir §II.4 – est « maîtrisé » : chaque séquence temporelle de mouvement de perturbation peut être rejoué pour permettre les comparaisons point à point. Les simulations auront lieu sur la même durée temporelle de 20 minutes ; la vitesse et les conditions d'environnement (angle de rencontre et état de mer) sont constants.

On remarquera que les entrées et sorties ne sont pas les mêmes suivant l'application d'une loi de type PID ou  $H_\infty$ . La différence est importante, puisque dans le cas  $H_\infty$ , la loi est privée d'une partie de l'information. Les mesures sont pour le PID : l'accélération, la vitesse et l'angle de roulis, la vitesse de lacet et l'angle de cap. Dans le cas du  $H_\infty$ , seuls la vitesse de roulis et l'angle de cap sont accessibles. Dans les deux cas, les sorties du correcteur sont les braquages souhaités des gouvernails et ailerons de stabilisation.

#### ***II.6.d Discrétisation des correcteurs $H_\infty$***

Les correcteurs  $H_\infty$  ont tous été calculés en temps continu. Cependant, dans l'application au réel la commande ne peut être réalisée qu'en temps discret. Il faut donc en tenir compte dans la simulation. Les correcteurs ont tous été discrétisés par la méthode du bloqueur d'ordre un.

Des instabilités apparaissent en simulation lorsque la méthode du bloqueur d'ordre zéro est utilisée. La déformation des caractéristiques fréquentielles du correcteur qui apparaît au voisinage de la fréquence de discrétisation introduit une amplification très forte de certaines fréquences, ce qui résulte en une forte pollution des signaux de commande et parfois en la déstabilisation du roulis.

#### ***II.6.e Simulateur de mouvements***

Sur la base des équations développées dans la partie A, nous avons mis en place dans Matlab/Simulink, voir figure B.12, un simulateur des mouvements d'un navire sur la houle.

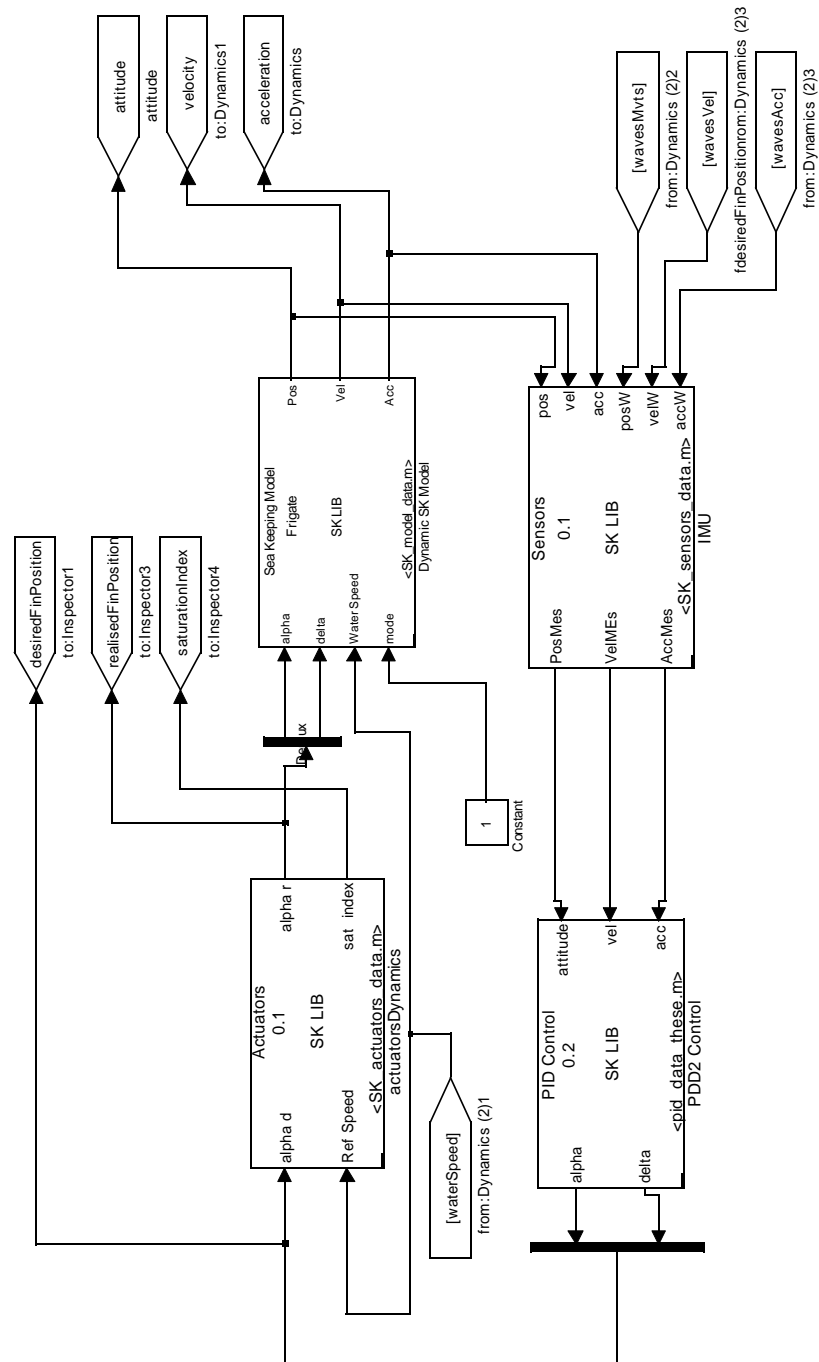


Figure B.12 simulateur de mouvements développé sous Matlab/Simulink

La génération des perturbations des mouvements est basée sur la superposition d'un grand nombre de composantes d'amplitude et de pulsation fixées par le spectre de perturbation et, comme déjà mentionné précédemment, sur le choix de phases aléatoires. Les signaux des perturbations sont entièrement reproductibles.

Les lois de commande sont représentées sous la forme d'une bibliothèque de blocs Simulink réutilisables. La commande est appliquée en temps discret, en tenant compte de retards purs sur chacune des mesures. La période de discrétisation est 0,1 seconde, soit 10 Hertz.

Des routines d'analyse permettent l'étude des signaux enregistrés. De plus, il est possible (et ce sera utilisé dans le chapitre III de cette partie) de simuler ses évolutions à vitesse, et à angle de rencontre variable.

### **II.6.f Correcteurs PID adaptés**

Les performances des correcteurs *PID* calculés pour chaque point de fonctionnement défini par la table B.8 ont été comparés. Afin de tester leur efficacité, nous les avons comparés en simulation, en faisant varier la vitesse, l'angle de rencontre et l'état de mer. Le but est de valider l'intérêt d'adapter le correcteur aux variations de ces paramètres. Les résultats sous forme graphique sont donnés dans les paragraphes qui suivent.

#### **II.6.f.1 Variation de la vitesse**

Les figures B.13 à B.17 montrent respectivement le taux de roulis, l'utilisation des actionneurs, et les fréquences de saturation quand le correcteur est adapté à la vitesse de déplacement du navire, noté *A* pour *Adapté*, et quand le correcteur utilisé est celui calculé à 25 noeuds, noté *CC*, pour *correcteur Constant*.

Le correcteur *A*, adapté pour chaque vitesse, réduit mieux le roulis que le correcteur *CC*, tout en utilisant moins les actionneurs : le gain en performance est de 30% à 10 noeuds, 20% à 15 noeuds et moins de 3% à 20 noeuds. Notons que le correcteur *CC* provoque beaucoup de saturations des ailerons de stabilisation (en position et en vitesse, voir figure B.16) quand il est appliqué à 10 noeuds. Les gouvernails ne sont jamais saturés (figure B.17).

Il est clair que l'apport en performance de l'adaptation à la vitesse est important.

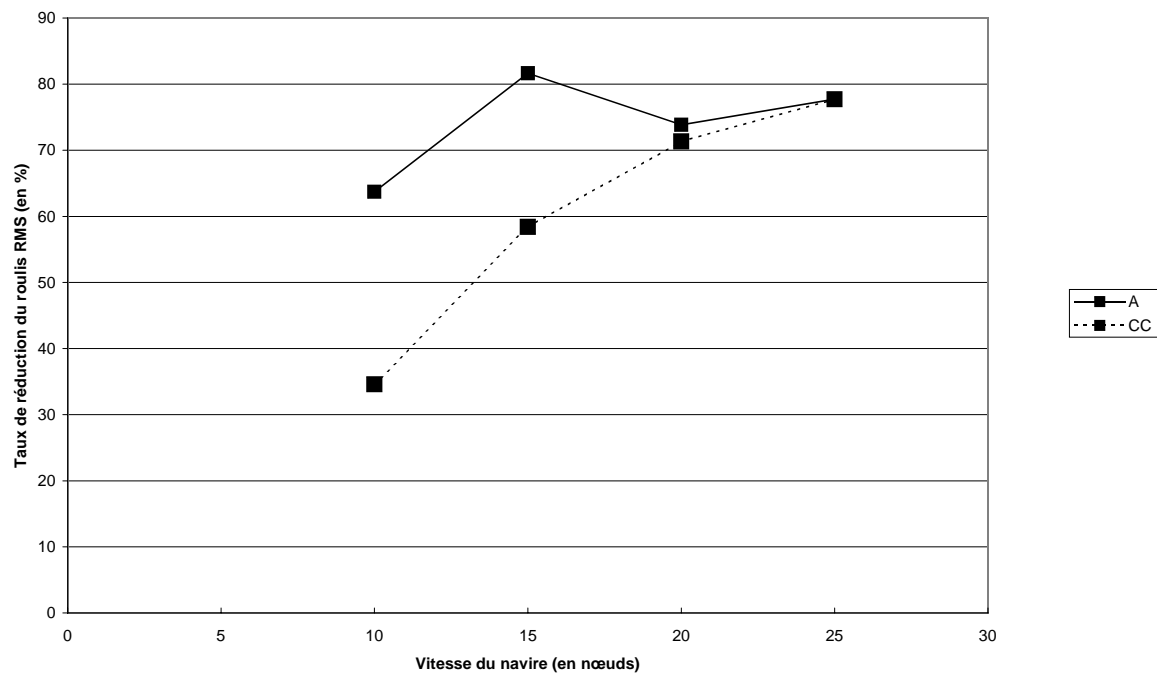


Figure B.13 Comparaison des taux de stabilisation du roulis obtenus avec des correcteurs PID adaptés en vitesse (A), et avec le correcteur calculé pour  $U_0=25$  noeuds (CC)

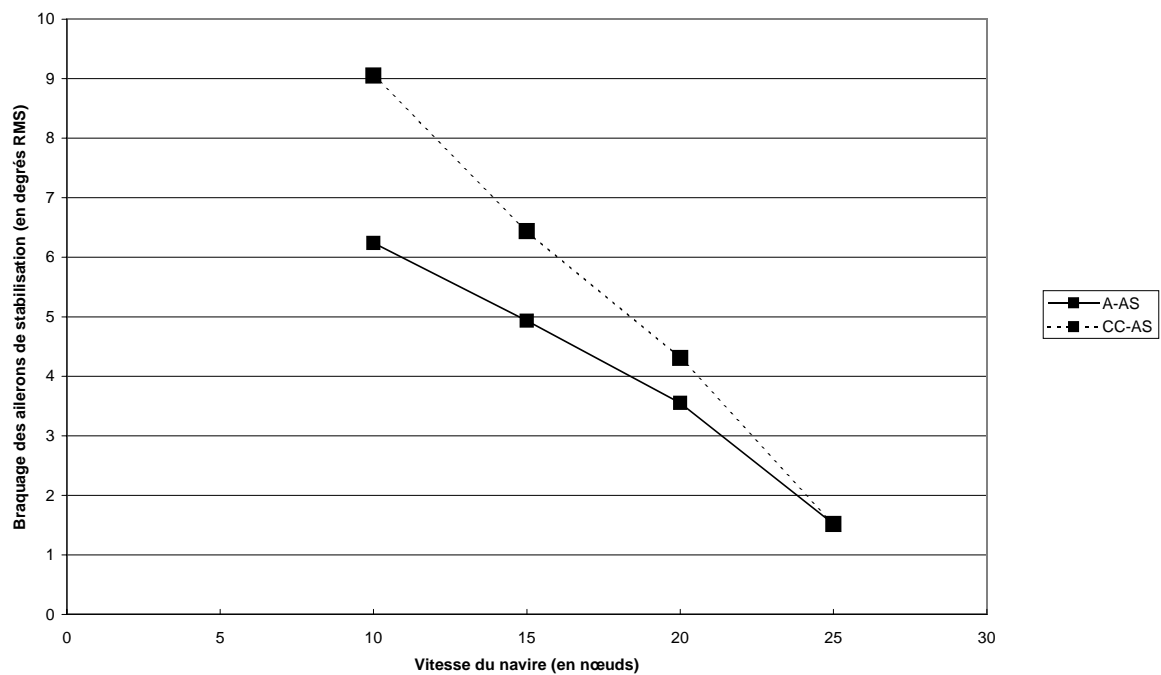


Figure B.14 Comparaison des braquages des ailerons de stabilisation obtenus avec des correcteurs PID adaptés en vitesse (A), et avec le correcteur calculé pour  $U_0=25$  noeuds (CC)

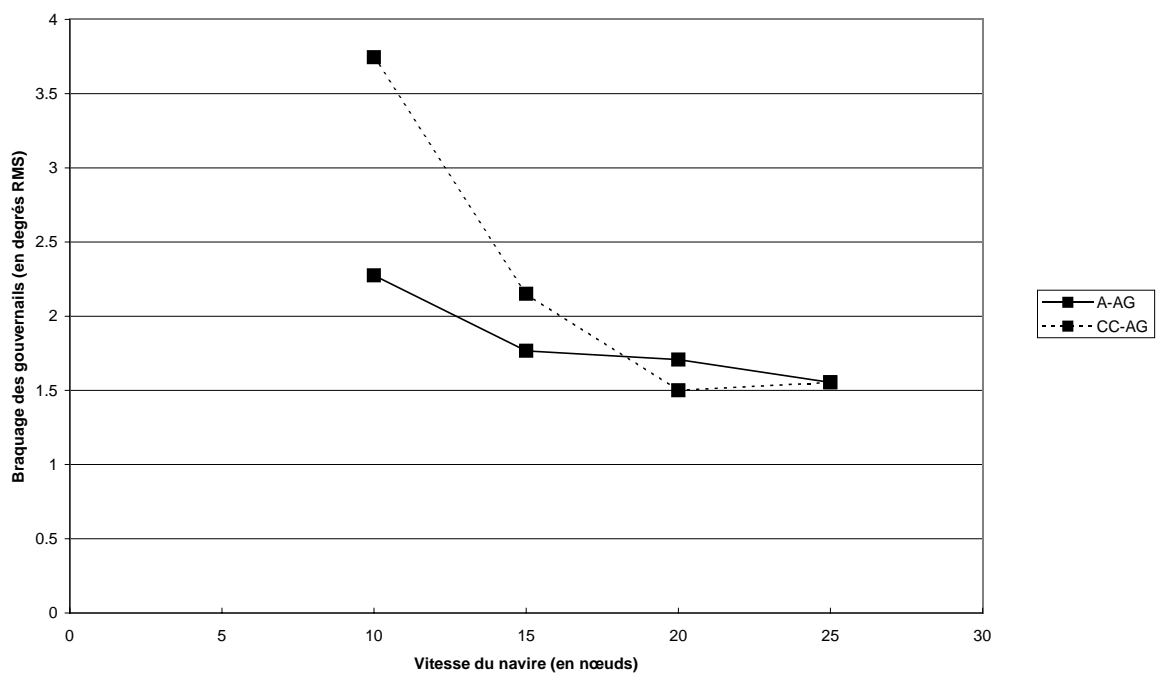


Figure B.15 Comparaison des braquages des gouvernails obtenus avec des correcteurs PID adaptés en vitesse (A), et avec le correcteur calculé pour  $U_0 = 25$  noeuds (CC)

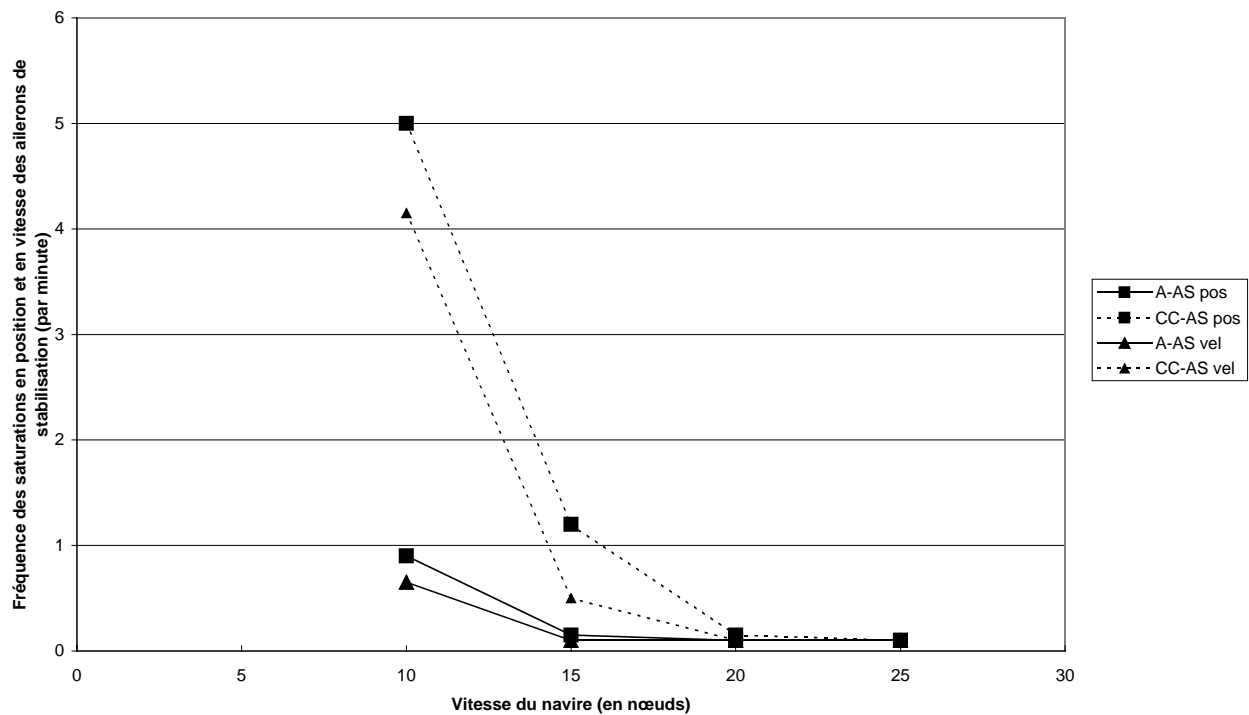


Figure B.16 comparaison des fréquences de saturation des ailerons de stabilisation en position et en vitesse obtenues avec des correcteurs PID adaptés en vitesse (A), et avec le correcteur calculé pour  $U_0 = 25$  noeuds (CC)

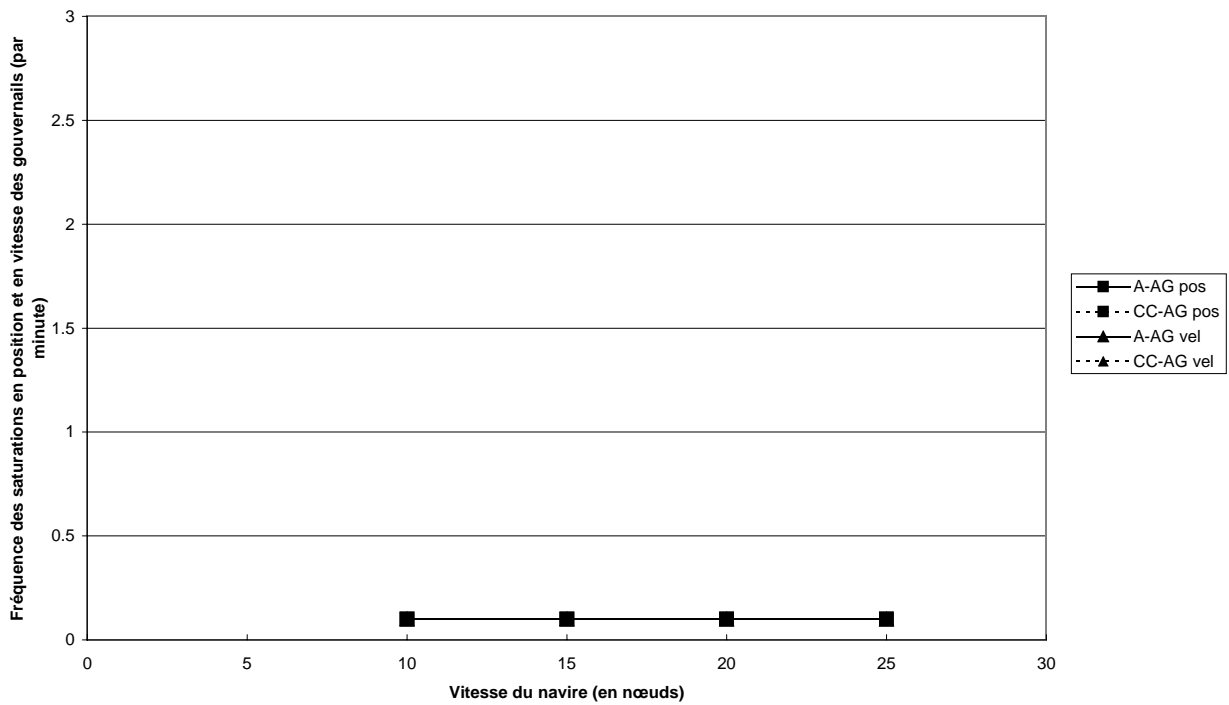


Figure B.17 comparaison des fréquences de saturation des gouvernails en position et en vitesse obtenues avec des correcteurs PID adaptés en vitesse (A), et avec le correcteur calculé pour  $U_0=25$  noeuds (CC). Tous les tracés sont superposés.

### II.6.f.2 Variation de l'angle de rencontre

Les figures B.18 à B.22 montrent respectivement le taux de roulis, l'utilisation des actionneurs, et les fréquences de saturation quand le correcteur est adapté à l'angle de rencontre  $\psi_e$ , noté *A* pour *Adapté*, et quand le correcteur utilisé est celui calculé pour  $\psi_e=90^\circ$ , noté *CC*, pour *Correcteur Constant*. L'état de mer est constant (état de mer 5) ainsi que la vitesse ( $U_0=25$  noeuds).

Le correcteur *CC* a des moins bonnes performances pour tous les angles de rencontre considérés, sauf pour  $\psi_e=15^\circ$ ,  $\psi_e=30^\circ$ ,  $\psi_e=60^\circ$  et pour  $\psi_e=75^\circ$ . Dans ces cas-là, ses performances dépassent celles du correcteur adapté, sans apparition de saturation plus fréquente, sauf à  $\psi_e=30^\circ$ . En revanche, pour les angles de rencontre plus grands, de  $\psi_e=105^\circ$  à  $\psi_e=165^\circ$ , les performances de roulis du correcteur *CC* sont inférieures à celles du correcteur adapté, et les saturations des ailerons de stabilisation, en position et en vitesse sont beaucoup plus fréquentes – trop par rapport aux contraintes du cahier des charges, voir figure B.21. La fréquence de saturation des gouvernails reste acceptable. De plus, à partir de  $\psi_e=120^\circ$ , le correcteur *CC* déstabilise le roulis. Notons que ce phénomène apparaît aussi pour le correcteur adapté pour  $\psi_e=150^\circ$  et  $165^\circ$ .

Le fait qu'un correcteur non adapté puisse faire mieux que le correcteur adapté paraît paradoxal, mais est une conséquence possible de notre méthode d'optimisation : la convergence de l'algorithme n'est pas fondé sur la proximité à la valeur optimale des paramètres, mais sur un nombre de génération évalué, soit en fait sur une durée de calcul. Permettre à l'algorithme d'explorer plus de solutions potentielles aurait permis de trouver un correcteur donnant des meilleurs résultats.

Notons aussi que les simulations effectuées pour des angles de rencontre faibles (entre  $15^\circ$  et  $45^\circ$ ) sont sujettes à caution. Dans ces cas, certaines vagues rattrapent le navire (leur période de rencontre est donc infinie), et les hypothèses posées pour le calcul des efforts hydrodynamiques ne sont plus valables. Les résultats obtenus tant en simulation temporelle que fréquentielle sont donc probablement éloignés de la réalité. Les résultats négatifs dans notre cas de l'optimisation doivent donc être relativisés.

Il est paradoxal qu'un correcteur adapté (en l'occurrence pour  $\psi_e = 150^\circ$  et  $165^\circ$ ) déstabilise le roulis. L'explication ici est que les gains calculés ne tiennent pas compte de l'influence de la perturbation de lacet, par l'intermédiaire de l'agitation des gouvernails, dans le mouvement de roulis du navire. Autrement dit, on ne tient pas compte dans l'optimisation de tous les effets qui se retrouvent dans la simulation temporelle. C'est une limitation de notre méthode (voir au paragraphe II.2), que l'on retrouvera par la suite.

En somme, l'adaptation à l'angle de rencontre permet, dans la plupart des cas d'atteindre de meilleures performances qu'avec un correcteur mal adapté ; rechercher à adapter un correcteur à l'angle de rencontre est donc justifié.

Ceci étant, il apparaît que la méthode de simulation fréquentielle devra être modifiée, si l'on veut obtenir des correcteurs mieux optimisés pour chaque angle de rencontre.



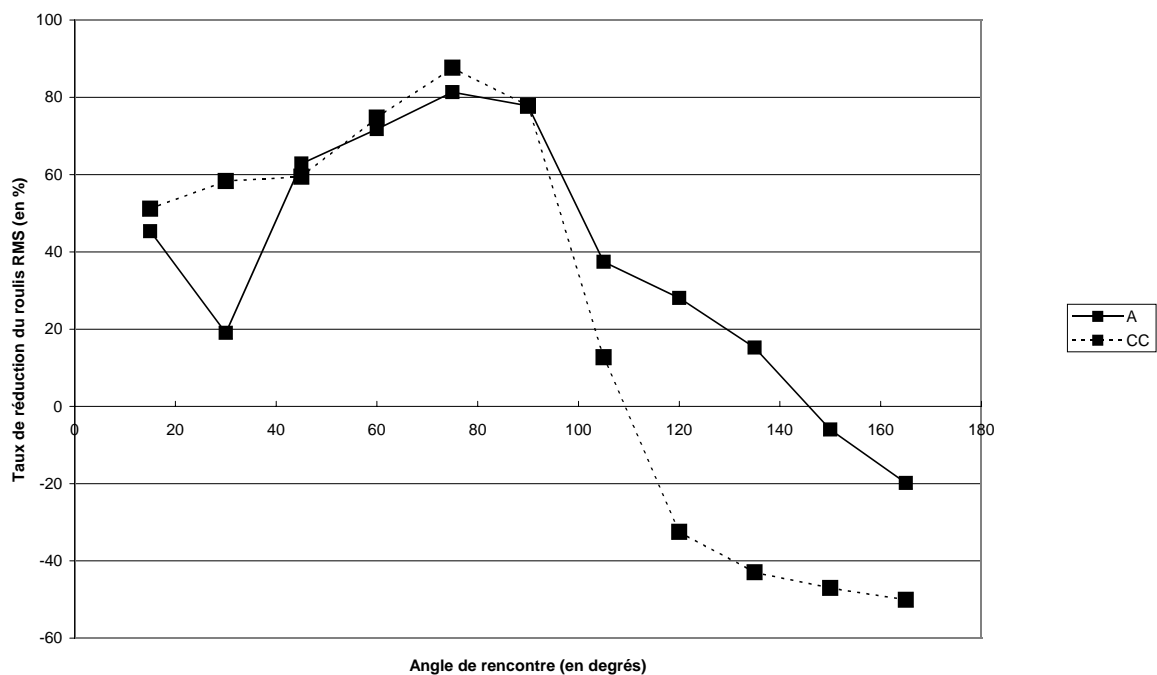


Figure B.18 Comparaison des taux de stabilisation du roulis obtenus avec des correcteurs PID adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour  $\psi_e=90^\circ$  (CC)

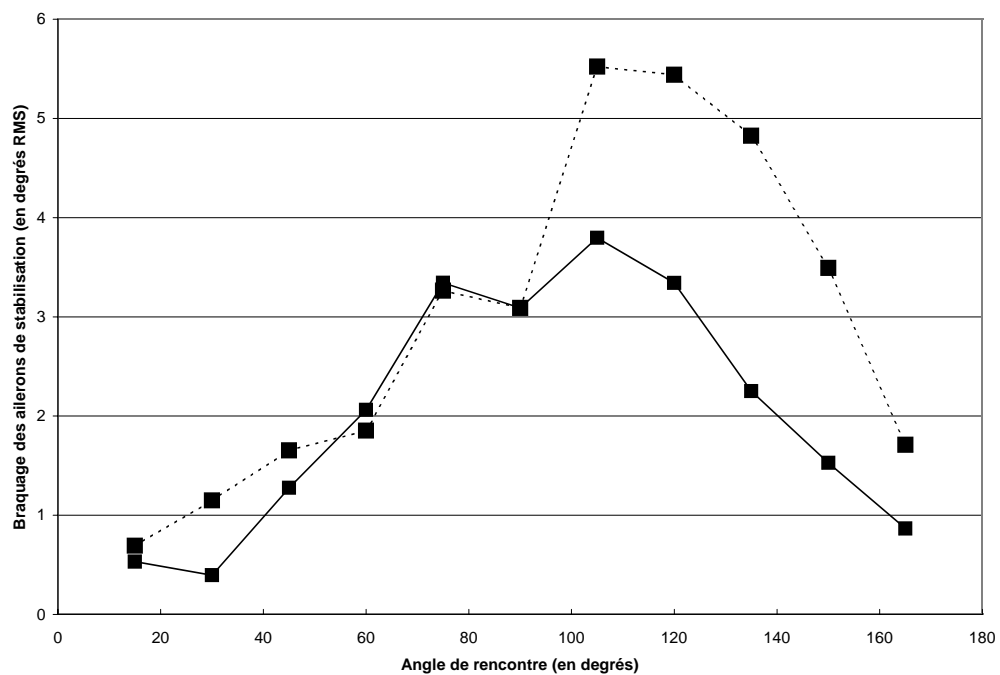


Figure B.19 Comparaison des braquages des ailerons de stabilisation obtenus avec des correcteurs PID adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour  $\psi_e=90^\circ$  (CC)

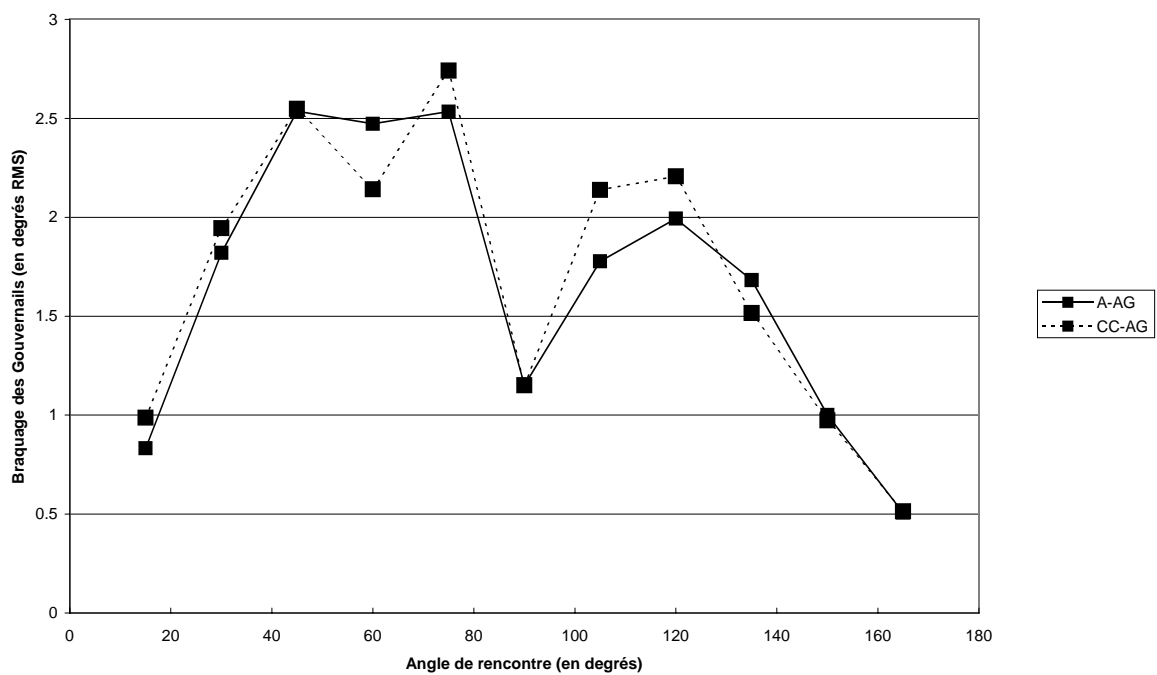


Figure B.20 Comparaison des braquages des gouvernails obtenus avec des correcteurs PID adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour  $\psi_e=90^\circ$  (CC)

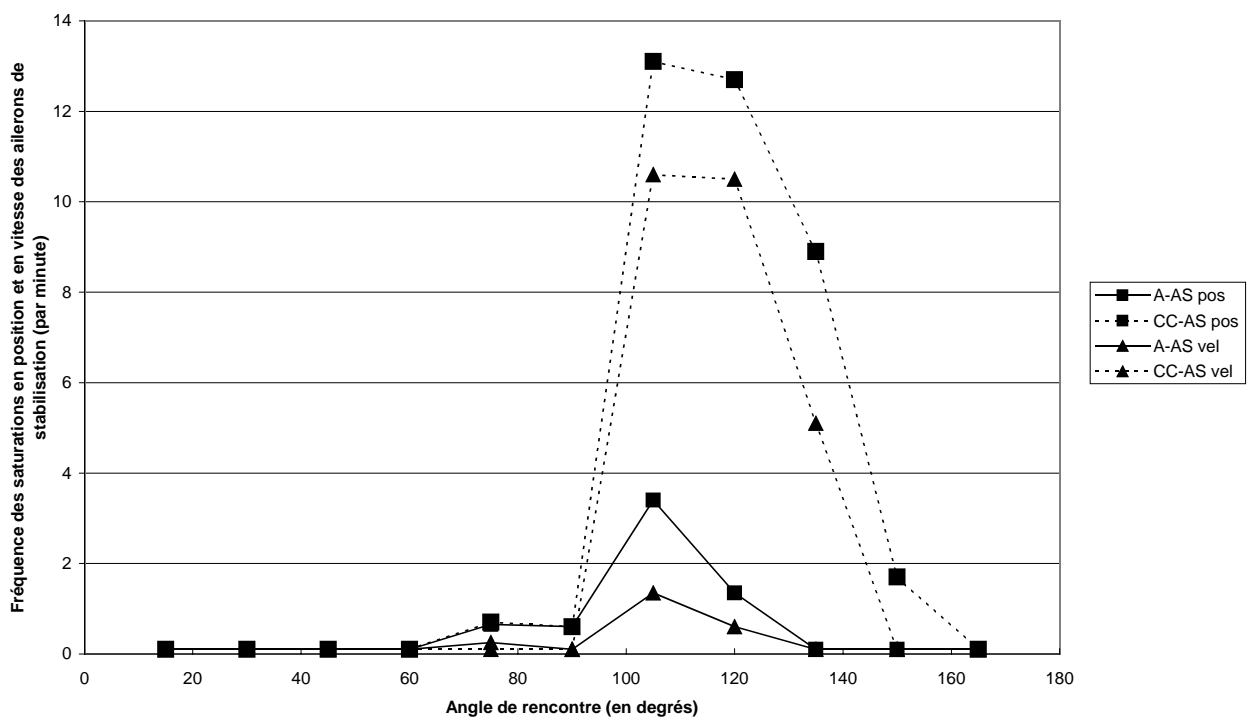


Figure B.21 comparaison des fréquences de saturation des ailerons de stabilisation en position et en vitesse obtenues avec des correcteurs PID adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour  $\psi_e=90^\circ$  (CC)

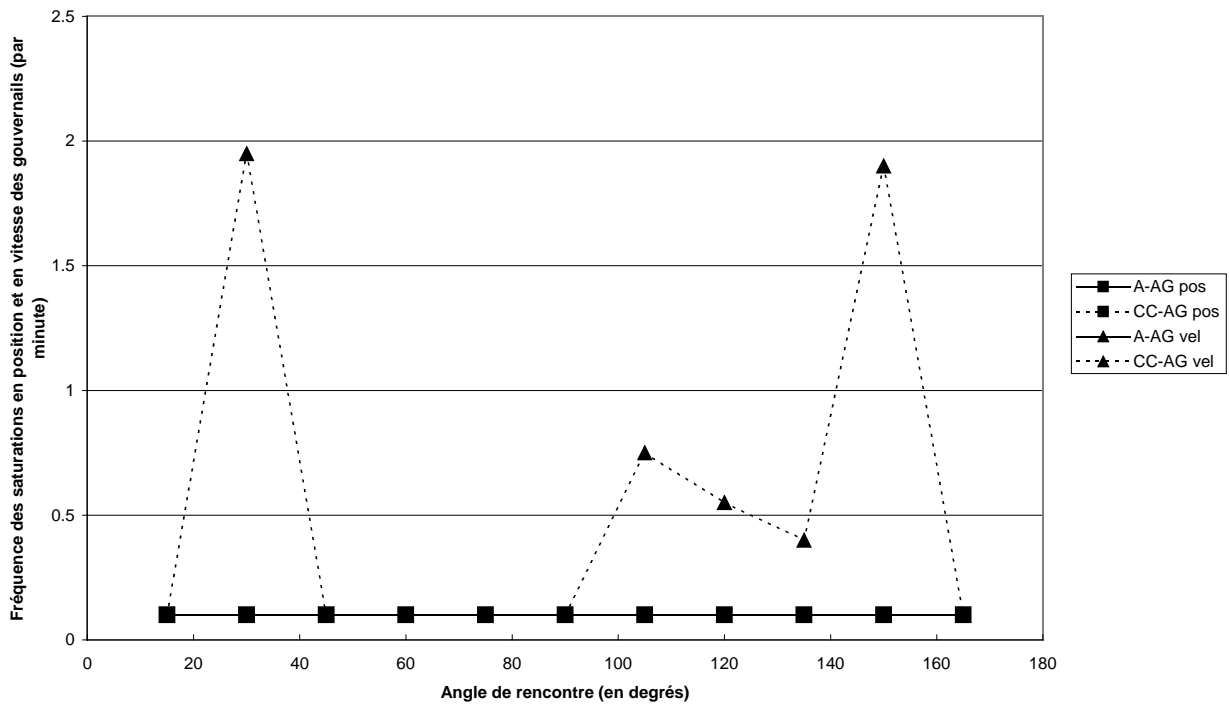


Figure B.22 comparaison des fréquences de saturation des gouvernails en position et en vitesse obtenues avec des correcteurs PID adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour  $\psi_e = 90^\circ$  (CC)

### II.6.f.3 Variation de l'état de mer

Les figures B.23 à B.27 montrent respectivement le taux de roulis, l'utilisation des actionneurs, et les fréquences de saturation quand le correcteur est adapté à l'état de mer (4 ou 6), noté *A* pour *Adapté*, et quand le correcteur utilisé est celui calculé pour un état de mer 5, noté *CC*, pour *correcteur Constant*. La vitesse est constante égale à 25 noeuds. Nous avons considéré les angles de rencontre de  $90^\circ$  et  $105^\circ$ , angles donnant les résultats les plus représentatifs en termes de saturations lorsque les correcteurs ne sont pas adaptés.

Les performances de stabilisation du roulis obtenues pour un angle rencontre de  $90^\circ$  par le correcteur CC sont toutes meilleures que par les correcteurs adaptés. C'est l'inverse pour un angle de rencontre de  $105^\circ$ . L'utilisation des ailerons de stabilisation est plus importante pour le correcteur CC dans tous les cas, sauf sur mer 4, pour un angle de rencontre de  $105^\circ$ , où le correcteur adapté consomme plus de puissance pour les ailerons de stabilisation. Les saturations sont très faibles sur mer 4, et dans aucun cas ne dépassent le maximum admissible. Sur mer 6 en revanche, le

correcteur CC provoque plus de saturations que spécifié au cahier des charges dans tous les cas (en ayant des performances moindres). Les gouvernails ne sont jamais saturés.

Ces simulations remettent en partie en cause la méthodologie elle-même, car nous ne pouvons assurer que nous allons trouver la solution absolue dans chaque cas – c’est ici surtout visible pour  $\psi_e=90^\circ$ . Les performances des correcteurs obtenus par l’algorithme génétique sont dues à plusieurs facteurs. D’abord, l’algorithme génétique utilisé, associé au processus lui-même<sup>40</sup>, est sensible à la population de départ choisie, ainsi qu’à la quantité de temps disponible. Autrement dit, avec plus de temps, ou une population de départ mieux choisie, l’optimisation donne des résultats meilleurs. De plus, les couplages non pris en compte dans l’optimisation (entre perturbation de lacet et mouvement de roulis causé par les gouvernails), peuvent conduire à des gains<sup>41</sup>  $K_{\delta 1}$ ,  $K_{\delta 2}$ , et  $K_{\delta 3}$  faibles, qui n’apportent pas de stabilisation en roulis quand le navire subit une perturbation en lacet que l’asservissement du cap doit compenser.

Les résultats présentés permettent cependant de constater qu’adapter les lois de commande à l’état de mer permet de respecter correctement les spécifications du cahier des charges en matières de saturations, ce que n’assure pas le correcteur CC, malgré ses meilleures performances de stabilisation du roulis. De plus, la méthode utilisée pour l’optimisation est limitée dans son application par l’absence de la prise en compte des perturbations de lacet.

---

<sup>40</sup> C’est à dire le calcul des objectifs et des contraintes.

<sup>41</sup> Voir paragraphe II.4.

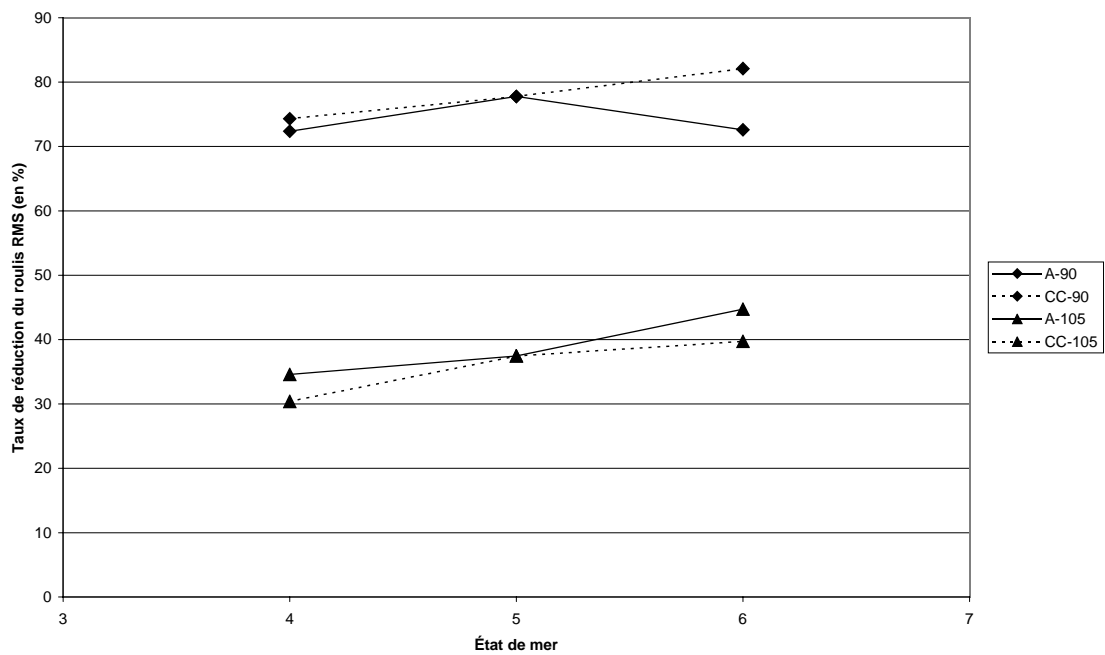


Figure B.23 Comparaison des taux de stabilisation du roulis obtenus avec des correcteurs PID adaptés en état de mer (A), et avec le correcteur calculé pour un état de mer 5 (CC)

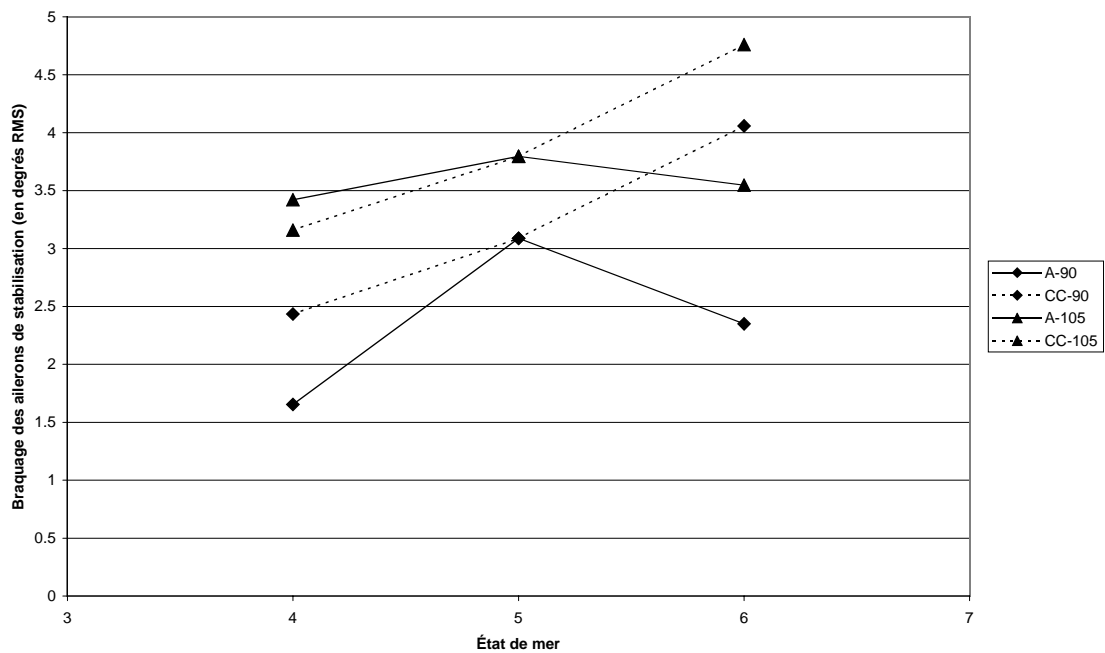


Figure B.24 Comparaison des braquages des ailerons de stabilisation obtenus avec des correcteurs PID adaptés en état de mer (A), et avec le correcteur calculé pour un état de mer 5 (CC)

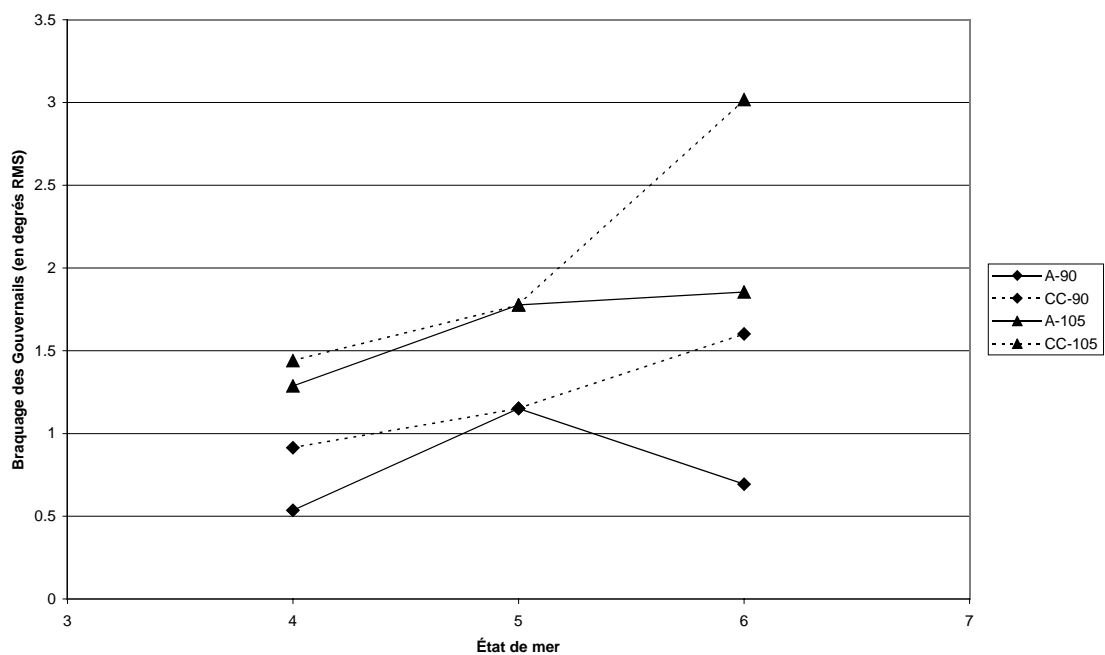


Figure B.25 Comparaison des braquages des gouvernails obtenus avec des correcteurs PID adaptés en état de mer (A), et avec le correcteur calculé pour un état de mer 5 (CC)

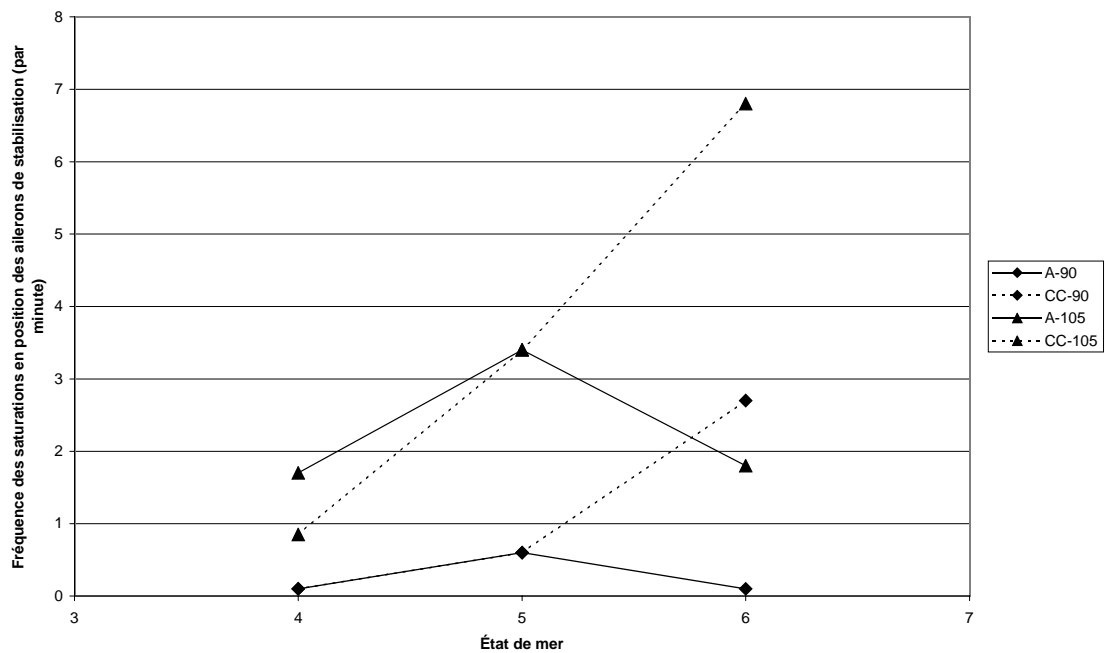


Figure B.26 Comparaison des fréquences de saturation en position des ailerons de stabilisation obtenues avec des correcteurs PID adaptés en état de mer (A), et avec le correcteur calculé pour un état de mer 5 (CC)

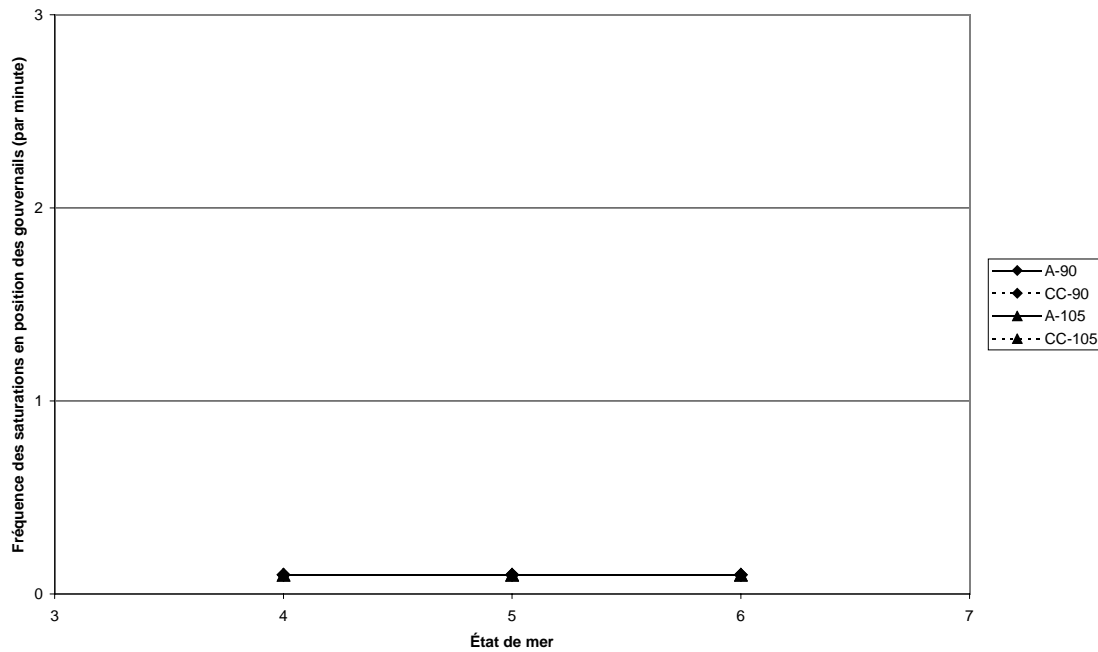


Figure B.27 Comparaison des fréquences de saturation en position des gouvernails obtenues avec des correcteurs PID adaptés en état de mer (A), et avec le correcteur calculé pour un état de mer 5 (CC)

### II.6.g Correcteurs $H_\infty$ adaptés

Les performances des correcteurs  $H_\infty$  calculés à chaque point de fonctionnement défini par la table B.9 ont été comparées. Afin de tester leur efficacité, nous avons comparé les résultats de simulation obtenus pour chaque correcteur à son point de fonctionnement avec le correcteur calculé pour une vitesse de 25 noeuds, un angle de rencontre  $\psi_e=90^\circ$ , et un état de mer 5. Le but est de valider l'intérêt d'adapter le correcteur à la vitesse, l'angle de rencontre des vagues, et l'état de mer. Les résultats sous forme graphique sont donnés dans les paragraphes qui suivent.

La nécessité de faire l'adaptation des correcteurs en fonction de la vitesse apparaît nettement. Dans les autres cas, le gain des correcteurs adaptés est faible par rapport au cas non adapté. Ceci s'explique, comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe II.5.b, par le fait que les variables utilisées pour le réglage des pondérations ne permettent pas vraiment d'adapter le correcteur : notamment, la pulsation de réglage de la pondération de sensibilité en roulis est constante, ce qui rend impossible l'adaptation à un glissement en fréquence de la perturbation.

### **II.6.g.1 Variation de la vitesse**

Les figures B.28 et B.29 montrent respectivement le taux de roulis et l'utilisation des actionneurs dans deux cas : quand le correcteur est adapté à la vitesse de déplacement du navire, noté *A* pour *Adapté*, et quand le correcteur utilisé est celui calculé à 25 noeuds, noté *CC*, pour *correcteur Constant*.

Les correcteurs adaptés à chaque vitesse ont des meilleures performances que le correcteur calculé pour 25 noeuds quand il est appliqué à 15 et 20 noeuds. Les performances sont semblables à 10 noeuds. L'utilisation des actionneurs est plus faible dans tous les cas.

L'efficacité des gouvernes augmente rapidement avec la vitesse, et le correcteur calculé pour 25 noeuds n'en tient pas compte. Le braquage demandé des actionneurs ne correspond plus aux efforts de stabilisation souhaités, il est donc logique d'avoir une chute de performances (de l'ordre de 15% à 15 noeuds). À 10 noeuds, les performances sont semblables, et le correcteur adapté à 10 noeuds utilise un peu plus les actionneurs que le correcteur adapté à 25 noeuds ; notons aussi que le correcteur adapté sature un peu plus (2,3 fois par minute) que le maximum permis par le cahier des charges<sup>42</sup>. La faible efficacité des actionneurs est accompagnée par la limitation du braquage des ailerons de stabilisation (qui devient plus forte avec la vitesse), ce qui limite le taux de stabilisation accessible à cette vitesse.

L'adaptation à la vitesse du navire sur l'eau est nécessaire, pour éviter les chutes de performances dues aux variations de la dynamique du navire.

---

<sup>42</sup> Ceci peut s'expliquer par les approximations faites pour avoir accès aux informations statistiques dans le domaine fréquentiel, voir paragraphes II.2.d (partie B) et II.2.b (partie A).



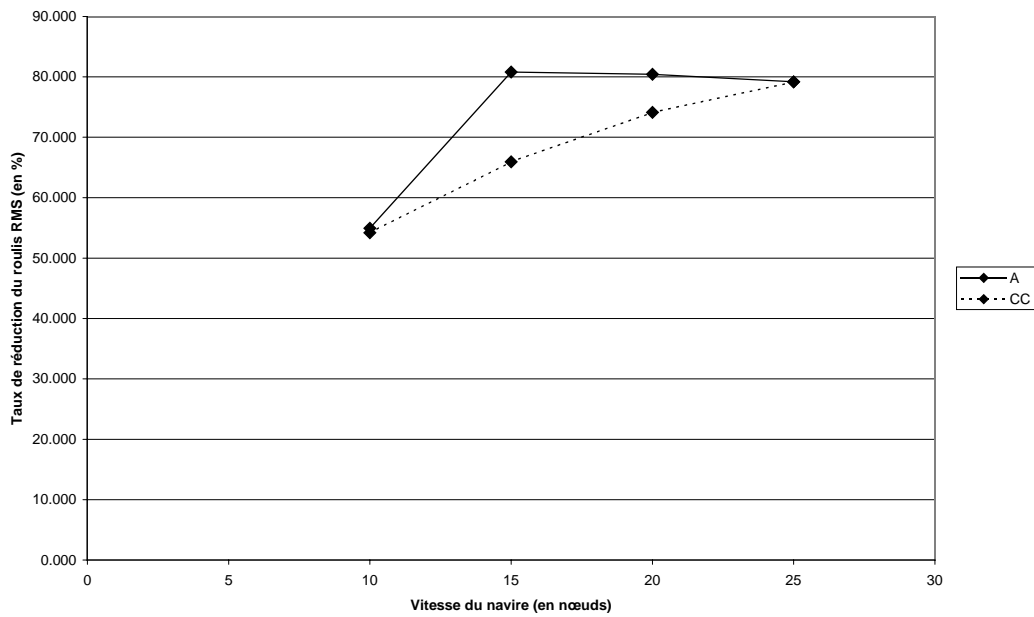


Figure B.28 Comparaison des taux de réduction du roulis obtenus avec des correcteurs  $H_\infty$  adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour  $U_0=25$  nds (CC)

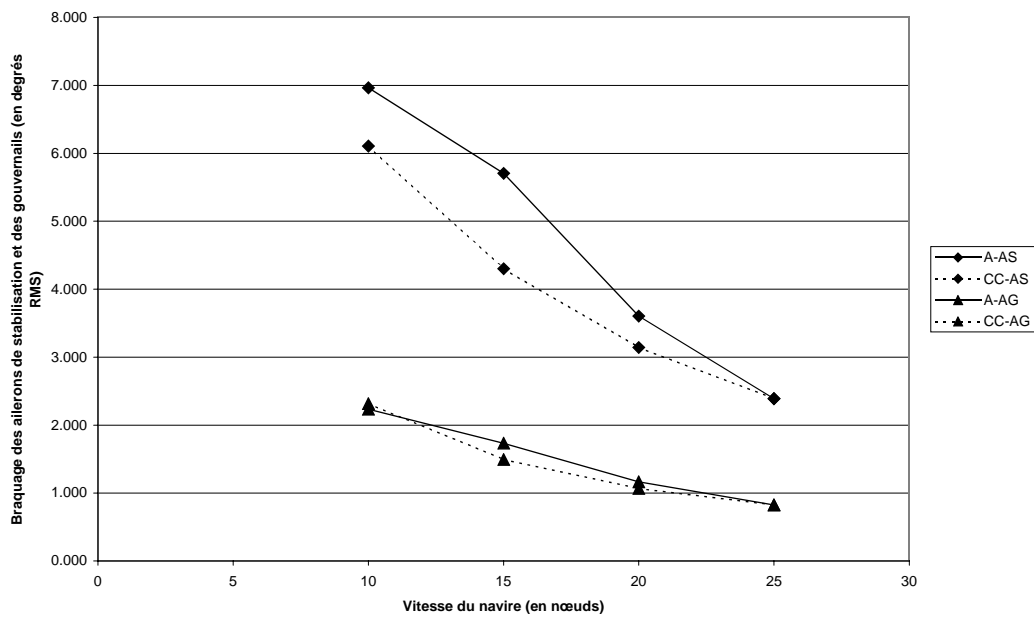


Figure B.29 Comparaison des agitation des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails : AG) obtenus avec des correcteurs  $H_\infty$  adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour  $U_0=25$  nds (CC)

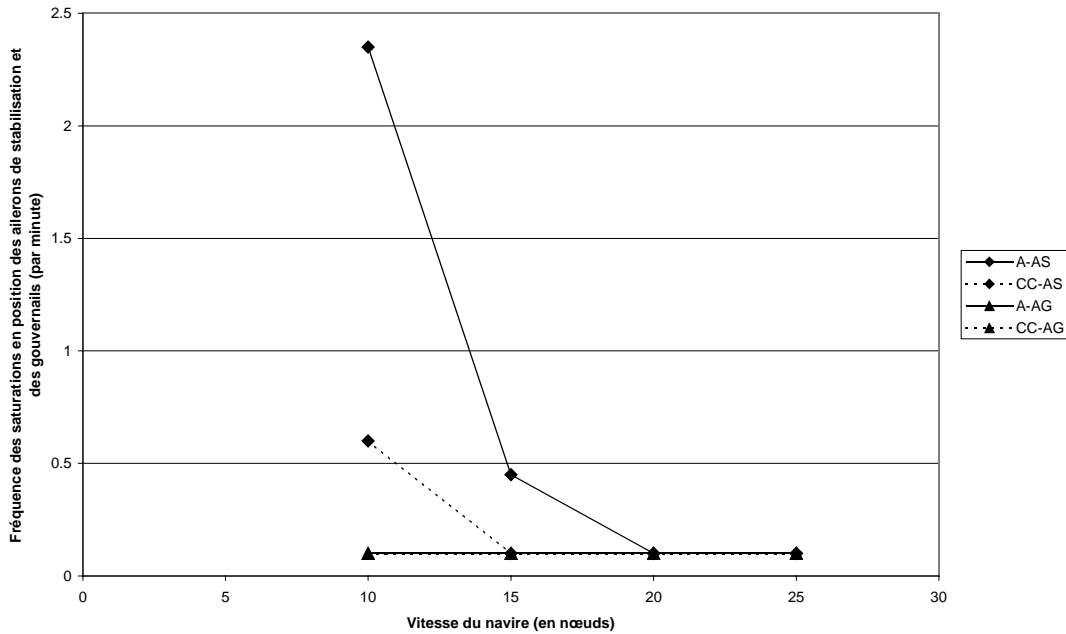


Figure B.30 Comparaison des fréquences de saturation des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails : AG) obtenues avec des correcteurs  $H_\infty$  adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour  $U_0=25$  nds (CC)

### II.6.g.2 Variation de l'angle de rencontre

Les figures B.31 et B.32 montrent respectivement le taux de roulis et l'utilisation des actionneurs dans deux cas : quand le correcteur est adapté à l'angle de rencontre, noté  $A$ , et quand le correcteur utilisé est celui calculé pour  $\psi_e=90^\circ$ , noté  $CC$ .

Les performances en stabilisation du roulis sont quasiment identiques dans tous les cas, que l'on utilise un correcteur adapté ou non. L'utilisation des actionneurs diffère d'un cas à l'autre, mais la baisse d'utilisation des gouvernails (par exemple pour le correcteur  $CC$  par rapport au correcteur  $A$  utilisé pour  $\psi_e=105^\circ$ ) est compensée par la hausse de l'utilisation des ailerons.

La nécessité de l'adaptation à l'angle de rencontre n'est pas ici évidente, mais nous l'avons montré dans le paragraphe II.6.f. L'absence de gain en performances, est en fait du à l'impossibilité d'adapter le correcteur à la modification de la perturbation avec les paramètres utilisés ( $z$ ,  $a_M$ ,  $d_M$ ). Pour s'adapter à l'angle de rencontre, il serait nécessaire de prendre en compte le glissement de la perturbation en fréquence dans la pondération de sensibilité en roulis.

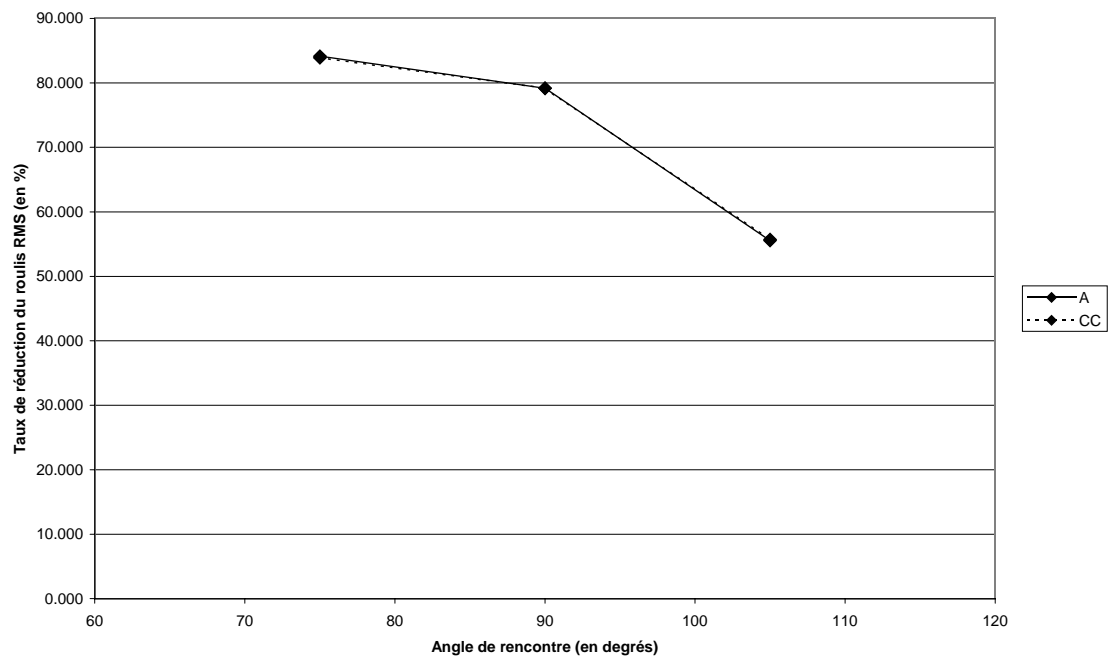


Figure B.31 Comparaison des taux de réduction du roulis obtenus avec des correcteurs  $H_\infty$  adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour  $\psi_e=90^\circ$  (CC)

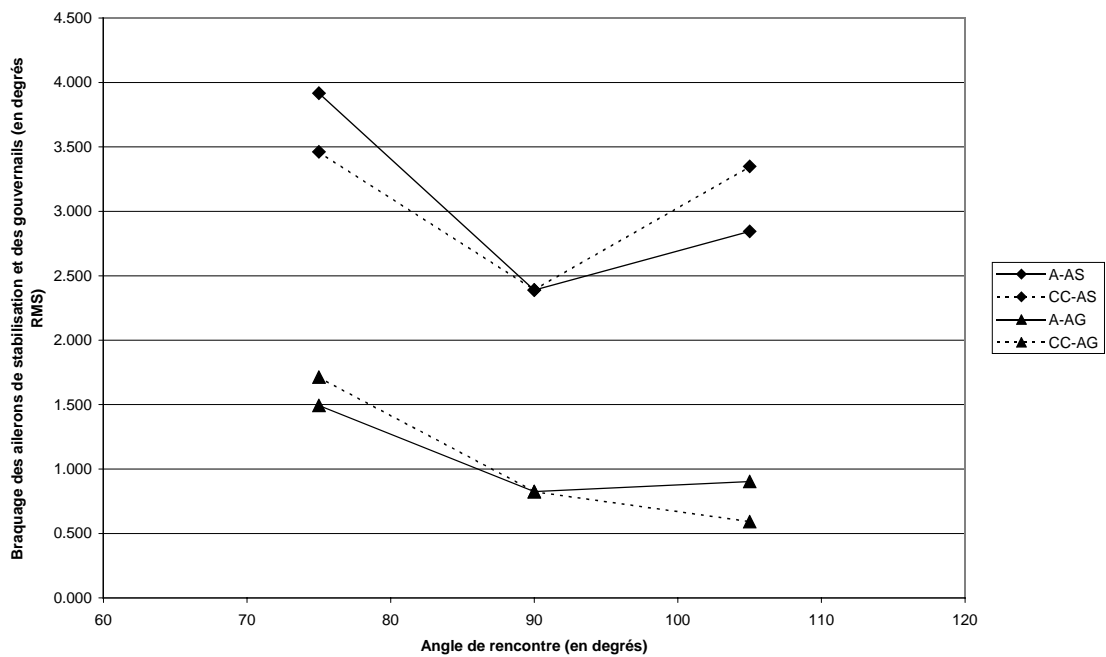


Figure B.32 Comparaison des braquages des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails : AG) obtenus avec des correcteurs  $H_\infty$  adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour  $\psi_e=90^\circ$  (CC)

### II.6.g.3 Variation de l'état de mer

Les figures B.33 et B.34 montrent respectivement le taux de roulis et l'utilisation des actionneurs dans deux cas : quand le correcteur est adapté à l'état de mer sur lequel évolue le navire, noté  $A$ , et quand le correcteur utilisé est celui calculé pour un état de mer 5, noté  $CC$ .

Les performances en stabilisation du roulis sont meilleures dans tous les cas (mais faiblement) pour le correcteur adapté en état de mer, le gain allant de 0,1% pour un état de mer 4, à 1% pour un état de mer 6. L'utilisation des actionneurs diffère faiblement d'un cas à l'autre.

La nécessité de l'adaptation à l'état de mer n'est encore pas évidente.

L'absence de gain notable en performances est aussi encore liée à l'impossibilité d'adapter le correcteur à la modification de la perturbation avec les paramètres utilisés ( $z$ ,  $a_M$ ,  $d_{MI}$ ).

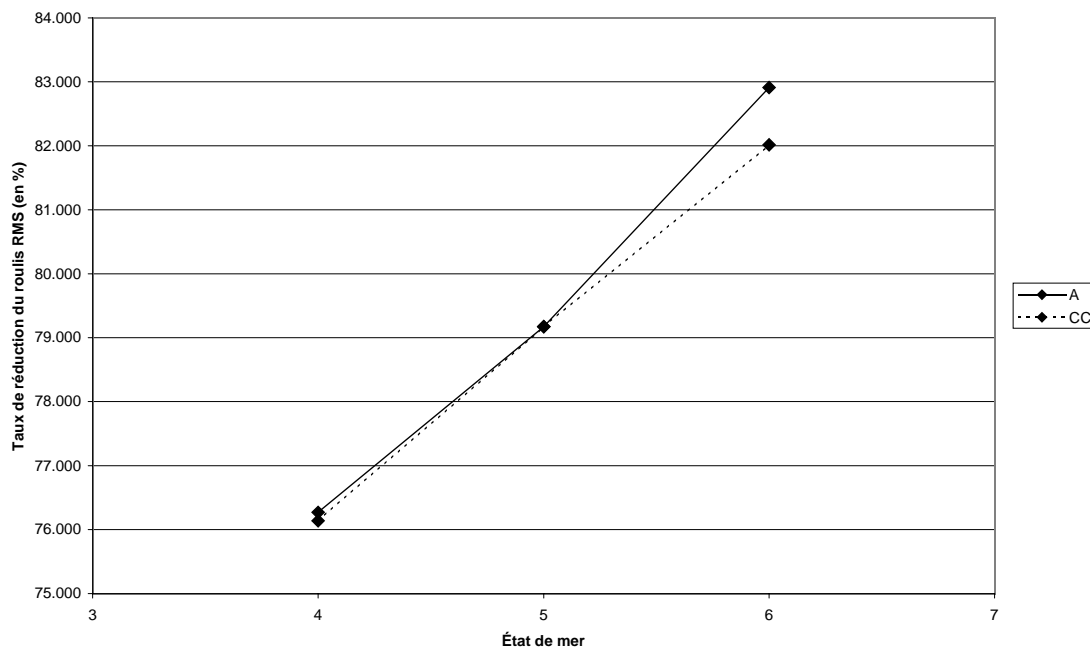


Figure B.33 Comparaison des taux de réduction du roulis obtenus avec des correcteurs  $H_\infty$  adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour un état de mer 5 (CC)

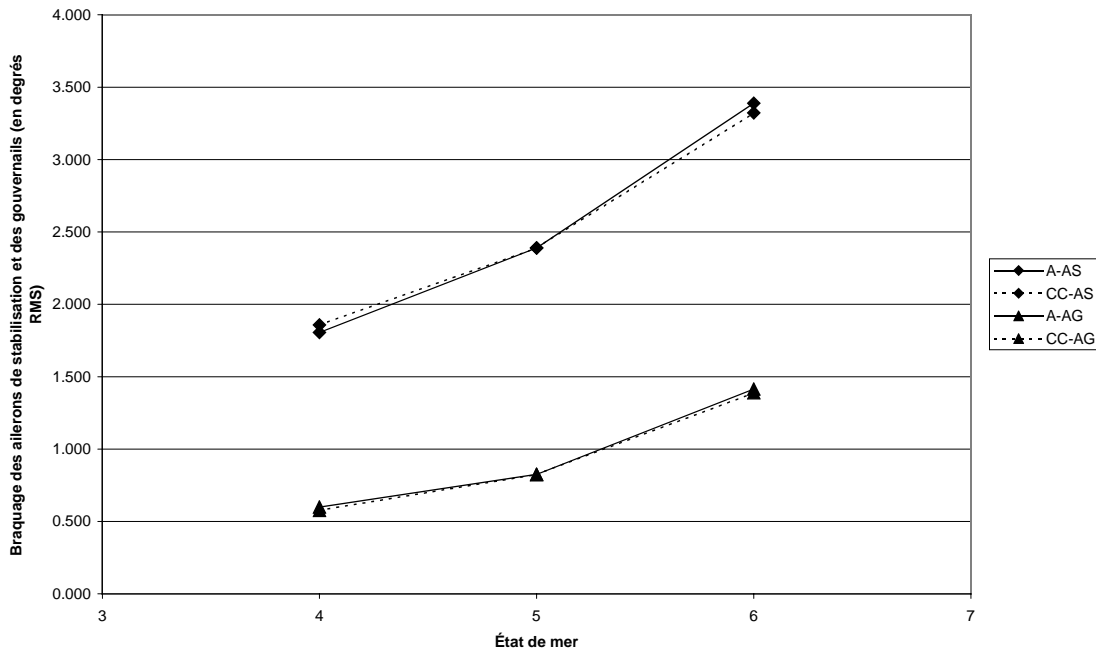


Figure B.34 Comparaison des braquages des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails : AG) obtenus avec des correcteurs  $H_\infty$  adaptés à chaque point de fonctionnement (A), et avec le correcteur calculé pour un état de mer 5 (CC)

### II.6.h Comparaison des performances des correcteurs $H_\infty$ et PID

Nous comparons les résultats des simulations pour les correcteurs  $H_\infty$  et PID optimisés au point de fonctionnement considéré :

- Comparaison de l'adaptation en vitesse : figures B.35, B.36 et B.37 (état de mer 5 et angle de rencontre  $90^\circ$ ),
- Comparaison de l'adaptation en angle de rencontre : figures B.38, B.39 et B.40 (état de mer 5 et vitesse de 25 noeuds),
- Comparaison de l'adaptation en état de mer : figures B.41, B.42 et B.43 (angle de rencontre  $90^\circ$  et vitesse de 25 noeuds).

On rappelle, pour les comparaisons, que les correcteurs  $H_\infty$  ne disposent pas de toutes les informations que possèdent les correcteurs PID.

### II.6.h.1 Adaptation en vitesse

À 20 et 25 noeuds, le correcteur  $H_\infty$  a des meilleures performances en réduction du roulis que le correcteur PID, tout en utilisant moins les actionneurs. À 15 noeuds, les performances sont quasiment identiques, alors que le correcteur  $H_\infty$  utilise les actionneurs de façon un peu plus importante que le correcteur PID. Pour la vitesse de 10 noeuds, le correcteur PID a des meilleures performances que le correcteur  $H_\infty$ , tout en utilisant moins les actionneurs. Notons de nouveau que le correcteur  $H_\infty$  pour 10 noeuds provoque des saturations dépassant légèrement les spécifications du cahier des charges.

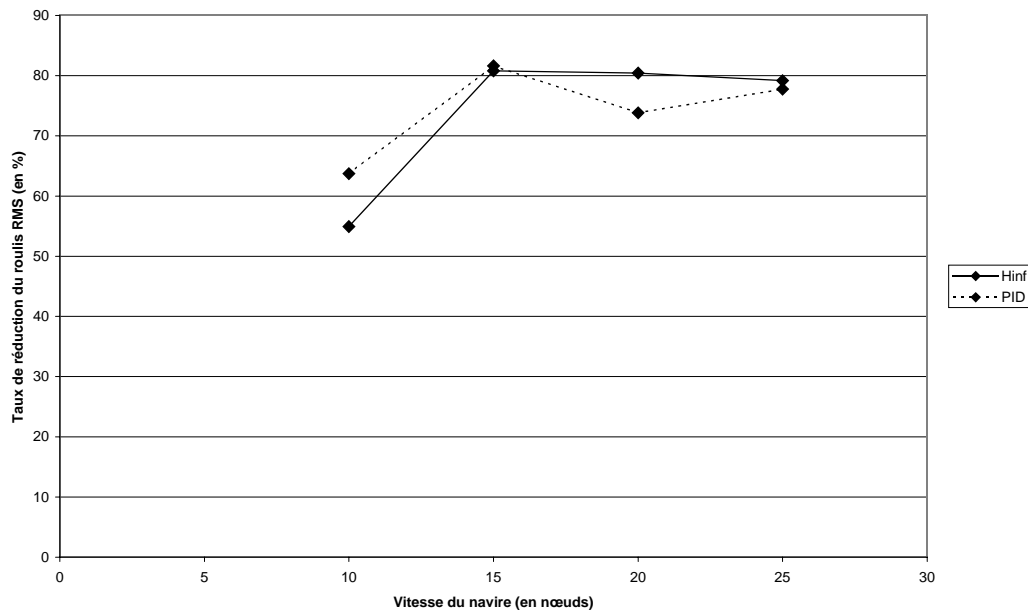


Figure B.35 Comparaison des taux de réduction du roulis avec les correcteurs PID et  $H_\infty$ , en fonction de la vitesse. Chaque correcteur est adapté à son point de fonctionnement

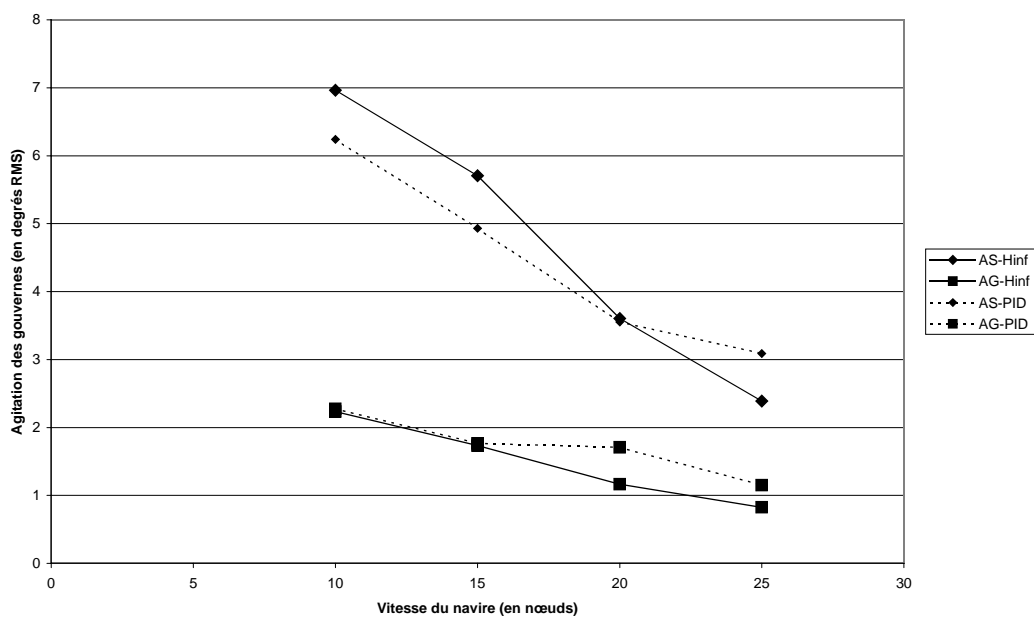


Figure B.36 Comparaison des braquages des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails : AG) obtenus avec les correcteurs PID et  $H_{\infty}$  en fonction de la vitesse. Chaque correcteur est adapté à son point de fonctionnement

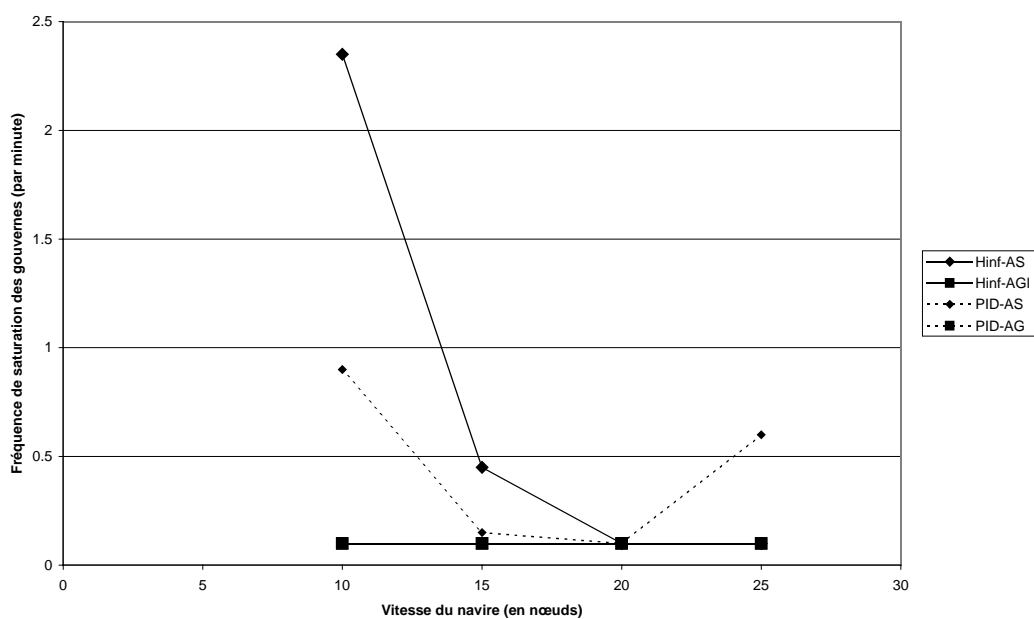


Figure B.37 Comparaison des fréquences de saturation des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails : AG) obtenues avec les correcteurs PID et  $H_{\infty}$  en fonction de la vitesse. Chaque correcteur est adapté à son point de fonctionnement

### II.6.h.2 Adaptation en angle de rencontre

On constate ici que les correcteurs  $H_\infty$  obtiennent des résultats meilleurs que les correcteurs PID, à chaque angle de rencontre considéré. On notera que si l'amélioration n'est que de quelques pour cents pour  $\psi_e=90^\circ$ , elle est de 15% pour  $\psi_e=105^\circ$ . En parallèle, les deux types de lois de commande provoquent peu de saturations, sauf le correcteur PID à  $\psi_e=105^\circ$ .

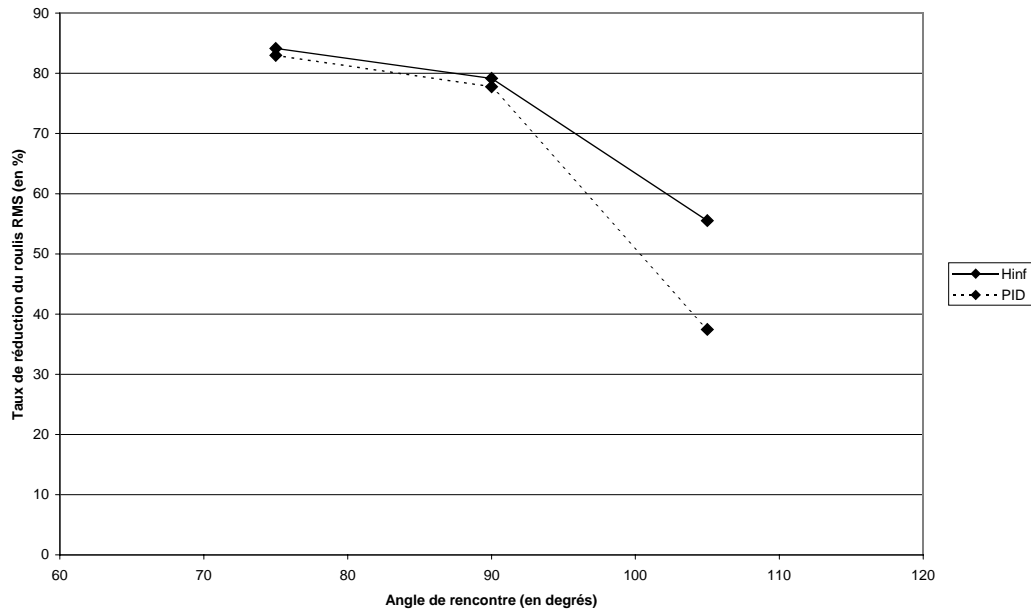


Figure B.38 Comparaison des taux de réduction du roulis obtenus avec les correcteurs PID et  $H_\infty$ , en fonction de l'angle de rencontre. Chaque correcteur est adapté à son point de fonctionnement



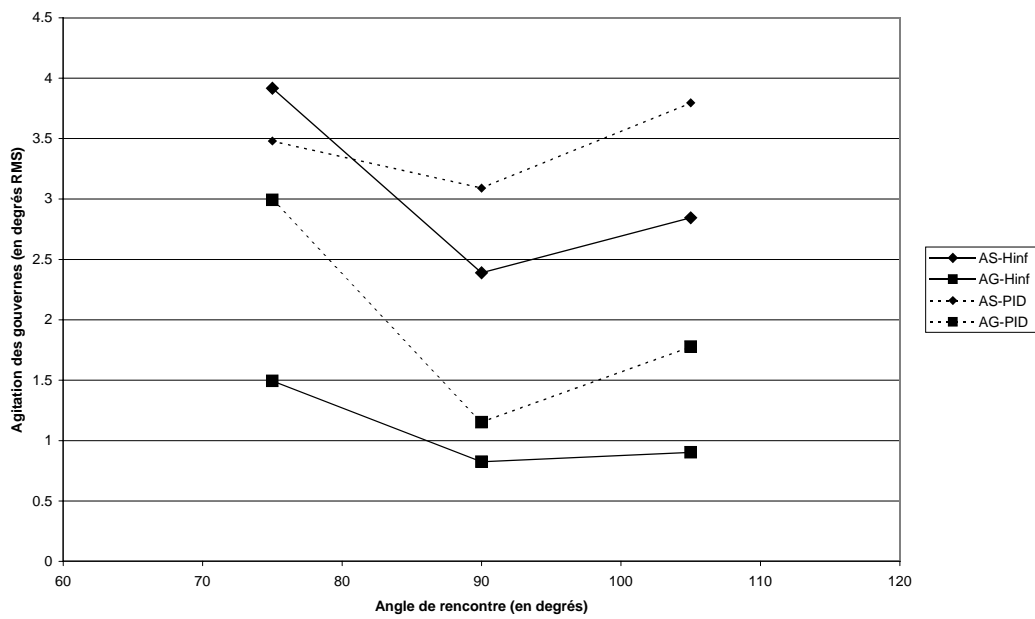


Figure B.39 Comparaison des braquages des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails : AG) obtenus avec les correcteurs PID et  $H_{\infty}$ , en fonction de l'angle de rencontre. Chaque correcteur est adapté à son point de fonctionnement

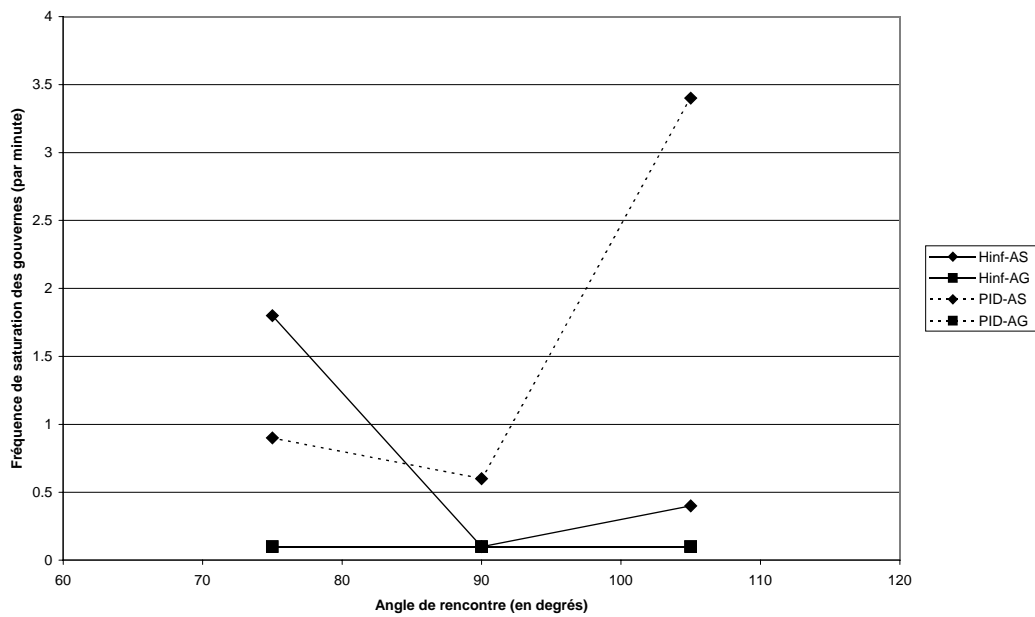


Figure B.40 Comparaison des fréquences de saturation des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails : AG) obtenues avec les correcteurs PID et  $H_{\infty}$ , en fonction de l'angle de rencontre. Chaque correcteur est adapté à son point de fonctionnement

### II.6.h.3 Adaptation en état de mer

Dans chaque cas de simulation les correcteurs  $H_\infty$  obtiennent des résultats meilleurs que les correcteurs PID, pour chaque état de mer considéré. Le gain en performances va de 1% pour un état de mer 5 à 8% pour un état de mer 6. L'utilisation des ailerons de stabilisation des deux correcteurs est semblable sur un état de mer 4, et plus faible pour le correcteur  $H_\infty$  sur des mer 5 et 6. L'utilisation des gouvernails des deux correcteurs est également semblable sur mer 4, inférieure pour le correcteur  $H_\infty$  par rapport au correcteur PID sur mer 5, et supérieure sur mer 6. Aucune fréquence de saturation ne dépasse le maximum autorisé par le cahier des charges.

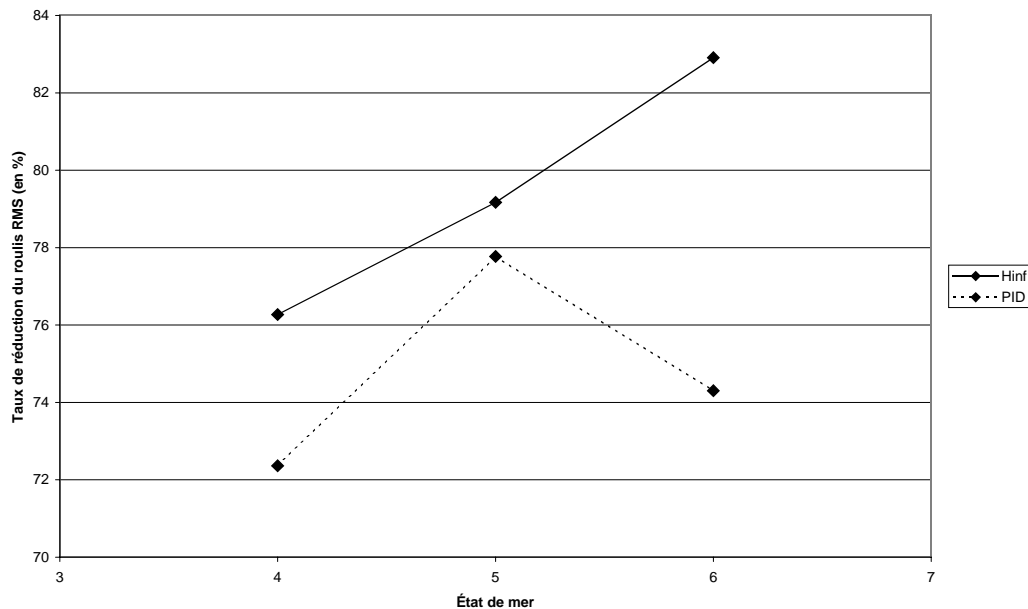


Figure B.41 Comparaison des taux de réduction du roulis obtenus avec les correcteurs PID et  $H_\infty$ , en fonction de l'état de mer. Chaque correcteur est adapté à son point de fonctionnement

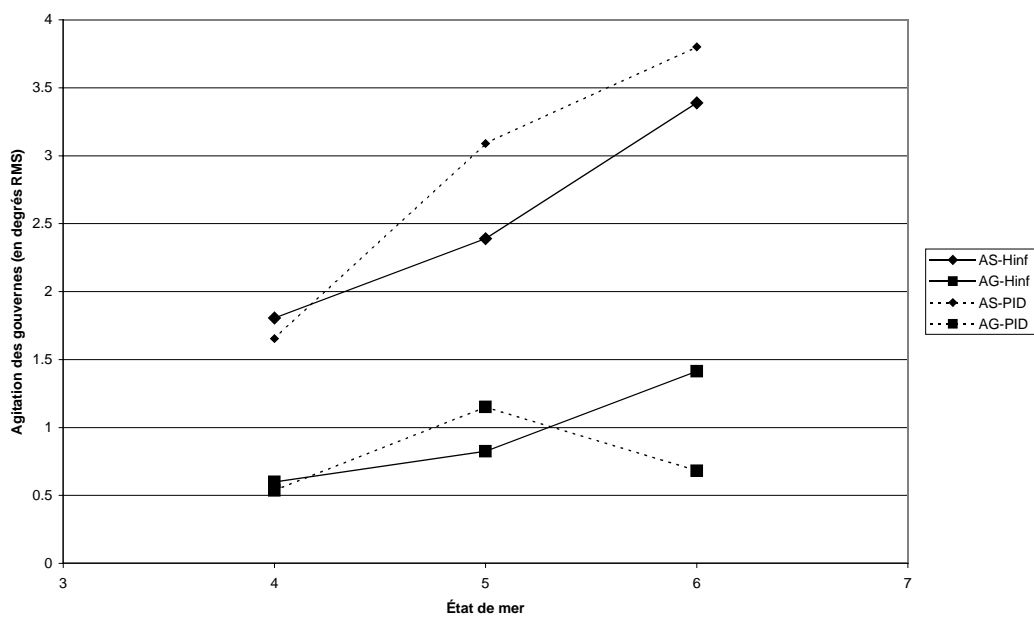


Figure B.42 Comparaison des braquages des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails :AG) obtenus avec les correcteurs PID et  $H_{\infty}$ , en fonction de l'état de mer. Chaque correcteur est adapté à son point de fonctionnement

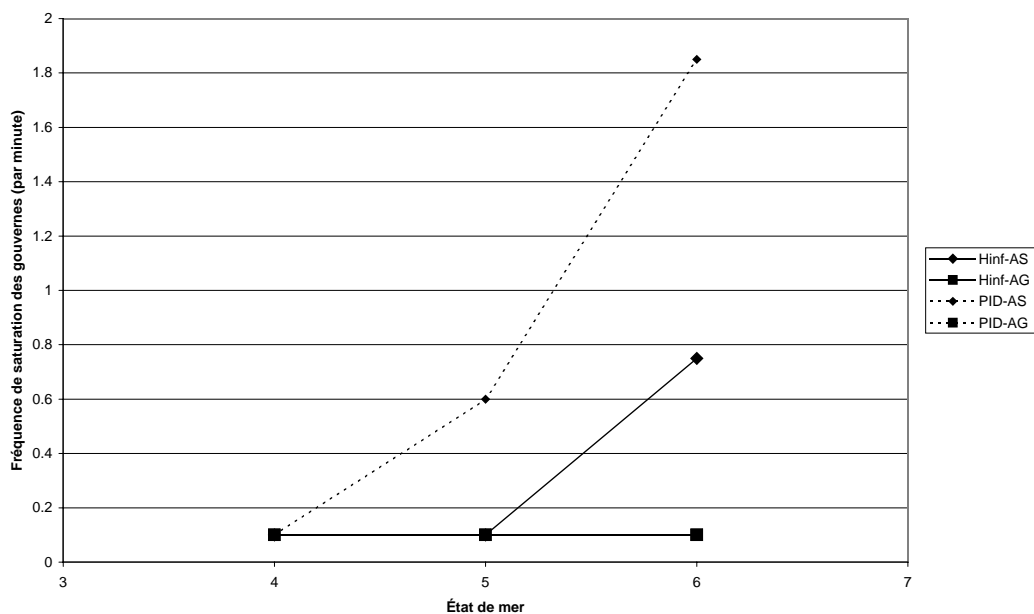


Figure B.43 Comparaison des fréquences de saturation des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails :AG) obtenues avec les correcteurs PID et  $H_{\infty}$ , en fonction de l'état de mer. Chaque correcteur est adapté à son point de fonctionnement

## ***II.7 Conclusion***

Nous avons dans ce chapitre exposé le développement et l'application d'une méthodologie de commande. Elle permet de régler des correcteurs de stabilisation en roulis (et d'asservissement de cap) pour un navire équipé d'ailerons et de gouvernails. Le réglage est posé naturellement comme un problème d'optimisation multi-objectifs, exprimé à partir d'un cahier des charges précis. Le réglage en lui-même est effectué soit par un algorithme génétique, soit par un crible de l'espace des variables d'optimisation.

Cette méthode est appliquée au réglage de deux types de correcteur : PID et  $H_\infty$ .

Les réglages sont ensuite appliqués en simulation pour montrer le bien-fondé de notre objectif (de synthèse d'un régulateur à gains programmés) : certaines variables définissant l'environnement du navire, sa vitesse par rapport à l'eau, l'angle de rencontre des vagues, et l'état de la mer, peuvent varier de façon importante. Les résultats de simulation montrent que l'on peut obtenir des meilleurs résultats – soit des meilleures performances, soit un meilleur respect des spécifications du cahier des charges – lorsqu'on adapte le correcteur au point de fonctionnement simulé.

Nous utiliserons cette méthode dans le chapitre suivant.

Cette méthode met en évidence que les calculs des performances du navire sur la houle pourraient être améliorés, pour tenir compte des couplages entre mouvements. Ceci permettrait d'apporter plus de précision dans l'optimisation des lois de commande. De plus, les correcteurs synthétisés dans le cadre  $H_\infty$  peuvent également être améliorés, en modifiant les pondérations, pour tenir compte d'autres paramètres de réglage des performances (profondeur du puits) que ceux employés.

Signalons finalement que la méthodologie développée est utilisable dans un cadre plus large que celui de la stabilisation des navires. Plus généralement, nous pensons qu'elle peut être appliquée avec profit dans le cadre général du réglage de correcteurs à partir de la donnée d'un cahier des charges et d'un environnement de simulation.

Les développements effectués dans ce chapitre ont fait l'objet de deux articles de conférence : [52] pour CIFA 2002 (également publié dans la revue RS/JESA : [53]) ; et [57] pour MCMC 2003.



### ***Chapitre III Synthèse d'un correcteur à gains programmés***

La fin du chapitre précédent a montré l'intérêt de l'adaptation des correcteurs en fonction de paramètres caractéristiques : la vitesse du navire par rapport à l'eau, l'angle de rencontre des vagues, l'état de mer.

Nous poursuivons notre démarche par l'étape suivante : comment calculer un correcteur à gains programmés ? Faire varier les gains d'un correcteur en fonction de paramètres caractéristiques de la dynamique du système à commander, est crucial dans bien des domaines d'application. Citons deux cas représentatifs : le domaine aéronautique, très actif sur le sujet, et le domaine maritime, qui nous intéresse particulièrement.

Les systèmes dynamiques que l'on rencontre en aéronautique dans le pilotage automatique des véhicules sont complexes, généralement non-linéaires et dépendent fortement des conditions extérieures. Par exemple, les coefficients du modèle dynamique, non-linéaire, du comportement d'un missile en tangage (voir [7], [20]) dépendent, au travers des lois de l'aérodynamique, de sa vitesse par rapport à l'air et de l'altitude d'évolution. L'adaptation à ces paramètres est essentiel pour obtenir des performances optimales dans toutes les conditions. La résolution classique du problème de synthèse passe par l'interpolation des correcteurs calculés à chaque point de fonctionnement, voir par exemple [43]. L'utilisation des LMI (pour *Linear Matrix Inequality* soit : Inégalité Matricielles Affines) permet d'éviter l'étape souvent délicate de l'interpolation, en générant directement un correcteur variant, assurant de plus des « meilleures » garanties de stabilité dans le cas de la variation rapide des paramètres de programmation, voir [11], [3].

Les modèles dynamiques des navires ne sont pas moins complexes. Un des paramètres que l'on rencontre le plus souvent dans ce cas est la vitesse par rapport à l'eau  $U_0$ . Les capacités manœuvrières changent considérablement avec la vitesse, à tel point que les gros navires (pétroliers, paquebots, ...) sont souvent tractés pour quitter le quai et sortir du port... L'adaptation des lois de commande du pilote automatique en fonction de la vitesse du navire  $U_0$  est nécessaire, et qui plus est devenue classique : Fossen [23] décrit le calcul par placement de pôles d'une loi de commande en pilotage, à partir d'un modèle paramétré en vitesse  $U_0$ . De même, et c'est en partie l'objet du présent rapport, la capacité de stabilisation d'un aileron de stabilisation varie de façon quadratique avec  $U_0$ . Nous avons déjà mentionné au §1.2 les techniques de Lloyd ([37]) et Grimble *et al.* ([26]), qui utilisent un coefficient global réduisant les gains du correcteur en fonction de la vitesse  $U_0$ . Aller

plus loin est notre objectif, en ajoutant aux lois de commande d'autres paramètres comme l'angle de rencontre  $\psi_e$  et l'état de mer.

Dans les années 90, des méthodes basées sur l'utilisation des LMI pour synthétiser directement les correcteurs à gains programmés sont apparues ; [3] est un papier central sur le sujet. L'impulsion a en partie été générée par les besoins du domaine du pilotage des lanceurs et missiles, comme [27] et [11]. Elles apportent, au prix de calculs importants et d'un certain conservatisme, la certitude d'avoir une boucle fermée conforme en chaque point de fonctionnement au comportement souhaité, et cela quel que soit la vitesse de variation des paramètres utilisés. Ces méthodes ne sont pas restées uniquement théoriques, les modalités pratiques de leur applications au réel ont été étudiées [5]. Elles ont trouvé un domaine d'application naturel en aéronautique [20], mais aussi dans d'autres domaines, comme pour la commande d'un mécanisme de lecteur de CD<sup>43</sup> [17].

Les méthodes de synthèse utilisant les LMI sont basées sur l'utilisation d'une formulation particulière du modèle dynamique à commander. Dans le cas général, on pourra écrire un système, dont certains paramètres  $\theta$ , varient sous la forme d'état (B.37).

$$\dot{x} = f(t, x, u, \theta) \quad (\text{B.37})$$

Cette formulation est beaucoup trop générale, et n'est pas utilisable dans notre cas. Les représentations utilisables pour la commande, et moins générales que (B.37), sont les représentations affine, polytopique ou basée sur les Transformées Fractionnelles Linéaires (ou *Linear Fractional Transform*, ou encore LFT) – dont nous rappelons brièvement les définitions au paragraphe III.1. Nous présentons aussi un résultat d'analyse des performances quadratiques de type  $H_\infty$  de ces représentations. Ces trois représentations permettent l'utilisation de théorèmes particuliers, voir les paragraphes III.2.a et III.2.b, menant à la synthèse d'un régulateur à gains programmés. Nous avons retenu la représentation polytopique pour différentes raisons : d'abord, son lien avec la synthèse des correcteurs  $H_\infty$  ; ensuite, l'existence d'outils numériques accessibles rapidement.

Nous présentons finalement, voir au paragraphe III.3, l'application à la stabilisation en roulis de ces techniques de synthèse LMI. Plus précisément, une méthode en quatre étapes permettant d'aboutir à un régulateur à gains programmés pour la stabilisation en roulis d'un navire est proposée.

---

<sup>43</sup> Cette application est, semble t-il, restée au niveau de la recherche.

Nous choisissons d'abord (étape 1) les paramètres que nous allons faire varier : ici la vitesse du navire  $U_0$  et un paramètre de qualité d'atténuation  $A_0$  ; nous justifierons l'utilisation de ce paramètre, et la disparition de l'angle de rencontre et de l'état de mer, comme paramètres variants. Puis, nous choisissons les points de fonctionnement utilisés. Nous faisons ensuite (étape 2) le réglage de correcteurs à chacun de ces points de fonctionnement, en nous basant sur la méthodologie développée au chapitre II de la partie B. Puis (étape 3), à partir de ces réglages, nous construisons d'abord un modèle standard LPV, par interpolation. Enfin (étape 4), un modèle standard polytopique est déduit du modèle LPV précédent, ce qui nous permet de calculer le régulateur à gains programmés proprement dit.

On notera que ce n'est qu'à cette dernière étape qu'apparaît la modélisation sous forme polytopique et la synthèse d'une loi de commande à gains programmés qui a été présentée comme l'étude principale de ce chapitre. Les trois premières étapes sont cependant cruciales dans ce paragraphe d'application, puisqu'elles vont permettre la construction d'un modèle à paramètres variant explicite. Les synthèses effectuées à l'étape 2 n'ont pas pour but essentiel de calculer des régulateurs, mais plutôt de calculer des modèles standards qui seront interpolés afin de construire un modèle LPV (étape 3), point de départ de la recherche de régulateurs à gains programmés (étape 4).

Les résultats obtenus en simulation sont présentés au paragraphe III.4.

### ***III.1 Modélisation d'un système à paramètres variants***

La représentation (B.37) est trop générale et n'est pas utilisable directement dans la synthèse si nous utilisons les LMI. Nous nous limiterons donc à un modèle linéaire à paramètres variants<sup>44</sup> (B.38). On remarquera que la notation du modèle dynamique du navire, au chapitre IV (partie A), peut s'écrire sous cette forme, sans l'équation de mesure.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (\text{B.38})$$

On notera  $\theta$  le vecteur des paramètres variants :  $\theta$  appartient à un ensemble  $\mathcal{Q}$ , sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . (B.38) pourra être écrite sous la forme de matrice système (B.39).

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{B.39})$$

---

<sup>44</sup> noté LPV.



Il faut noter que la dépendance des matrices est ici très générale : il n'y a pas de contrainte dans l'utilisation de  $\theta$ , et notamment les quatre matrices définissant le système pourraient être non-linéaires en  $\theta$ . Ce modèle est encore trop général ; nous utilisons des représentations plus simples, que nous détaillons ci-dessous.

### **III.1.a Représentation affine**

Supposons que la matrice système (B.39) dépende de façon affine de  $\theta$ . Les  $N$  variables sont indépendantes, et notées  $\theta_i$ . Elles ont leurs valeurs dans les intervalles respectifs  $[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$ . Alors, on peut écrire que la matrice système a la forme (B.40).

$$P(\theta) = P_0 + \sum_{i=1}^N \theta_i P_i \quad (\text{B.40})$$

On parle de représentation affine. Remarquons que cette représentation considère des variations indépendantes pour tous les paramètres. Elle couvre donc un domaine où le système pourrait ne pas avoir un sens physique, ce qui est une source de conservatisme. Par exemple, supposons que la matrice système correspondant au modèle du navire (B.1) dépende de la vitesse sur l'eau  $U_0$  par un polynôme du 2<sup>nd</sup> degré (ce qui est proche de la réalité) :

$$P(U_0) = P_0 + P_1 U_0 + P_2 U_0^2 \quad (\text{B.41})$$

Ce modèle n'est pas affine, mais on peut en construire un (B.42), en supposant que les composantes en  $U_0$  et  $U_0^2$  sont indépendantes ; nous les noterons respectivement  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Si le domaine de variation de la vitesse  $U_0$  est l'intervalle entre 5 et 25 noeuds, alors le domaine de variation de  $\theta_1$  est l'intervalle  $[5, 25]$  et celui de  $\theta_2$  est  $[25, 625]$ .

$$P(\theta_1, \theta_2) = P_0 + P_1 \theta_1 + P_2 \theta_2 \quad (\text{B.42})$$

En un point où les paramètres sont physiquement réalistes, les deux variables sont liées par la relation  $\theta_2 = \theta_1^2$ , et alors, les modèles (B.42) et (B.41) sont identiques. Par exemple, on calcule le modèle qui correspond à  $U_0 = 10$  noeuds, en prenant les paramètres  $\theta_1 = 10$  et  $\theta_2 = 100$ . Mais la représentation introduit des points qui ne correspondent à rien de physique : par exemple, le cas avec  $\theta_1 = 10$  et  $\theta_2 = 625$  n'est pas réaliste car alors la relation  $\theta_2 = \theta_1^2$  n'est plus vérifiée.

La représentation affine est facile à appréhender et à calculer. Malheureusement, nous allons le voir plus loin, elle n'est pas adaptée à notre cas d'étude. Il faut donc utiliser une représentation plus complexe.

### III.1.b Représentation polytopique

Au contraire de la représentation affine, basée sur la dépendance affine dans les paramètres variant, la représentation polytopique est basée sur les notions de barycentre et d'enveloppe convexe. Précisons d'abord cette dernière notion : l'enveloppe convexe d'un ensemble de points<sup>45</sup>  $P_i$ , notée  $co(P_i)$ , est le plus petit ensemble convexe contenant tous les sommets. Cela correspond en géométrie plane à rechercher pour un nuage de points du plan, le plus petit polygone contenant tous ces points. On peut l'exprimer par la relation barycentrique (B.43).

$$co(P_i, i \in \{1, N\}) = \left\{ P = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i \text{ avec } \alpha_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (\text{B.43})$$

On s'assure que les matrices  $P$  définies par (B.43) sont bien toutes à l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble des sommets  $P_i$ , grâce aux conditions sur les coordonnées :

- les coordonnées sont toutes positives :  $\forall i, \alpha_i \geq 0$
- et elles sont de somme unité :  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$

Une matrice système  $P$  appartenant à  $co(P_i)$  est donc décrite par un ensemble de coordonnées  $\alpha_i$ , appelées coordonnées polytopiques, analogues des coordonnées barycentriques, décrivant sa position par rapport aux points de référence  $P_i$  (B.44). Naturellement, les coordonnées polytopiques varient en fonction du paramètre  $\theta$ . Chaque élément de la matrice système  $P$  est aussi barycentre d'un ensemble de points sommets, qui sont les éléments de mêmes coordonnées dans les matrices  $P_i$ .

$$P(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\theta) P_i \quad (\text{B.44})$$

---

<sup>45</sup> au sens d'élément d'un espace vectoriel de dimension finie. Il peut s'agir de point dans le plan, l'espace, de matrices, etc...

Le système LPV général (B.39) précédent admet un modèle polytopique non conservatif si on peut déterminer un ensemble de  $N$  sommets  $P_i$  tels que l'ensemble des systèmes décrits par  $P(\theta)$  coïncide avec l'enveloppe convexe des  $P_i$ , soit (B.45).

$$\{P(\theta), \theta \in \Omega\} = \text{co}(P_i, i \in \{1, N\}) \quad (\text{B.45})$$

Dans le cas général, le domaine  $\Omega$  est complexe et on n'a accès qu'à un recouvrement polytopique, donc un modèle conservatif. Biannic donne dans sa thèse ([11]) un algorithme pour déterminer un recouvrement polytopique et le cas échéant pour l'améliorer, en réduisant la taille du recouvrement, ou en supprimant des points inutiles.

Il est important de remarquer, et on le verra par la suite, qu'on peut passer d'un modèle affine (B.40) à un modèle polytopique sans aucune introduction de conservatisme, si l'ensemble  $\Omega$  est lui-même un polytope. Si on note  $\pi_i$  les sommets du polytope définissant  $\Omega$ , on a  $\Omega = \text{co}(\pi_i, i \in \{1, N\})$ . Pour une valeur des paramètres  $\theta$ , il existe des coordonnées  $\alpha_i$  définissant la position de  $\theta$  dans  $\Omega$  (B.46).

$$\theta = \sum_{i=1}^N \alpha_i \pi_i \quad (\text{B.46})$$

On montre qu'alors, le système (B.47) est une représentation polytopique non conservative de  $P$  : les points sommets du système polytopique sont les images par  $P$  des points sommets de  $\Omega$ .

$$\{P(\theta), \theta \in \Omega\} = \text{co}(P_i = P(\pi_i), i \in \{1, N\}) \quad (\text{B.47})$$

Un des problèmes principaux de cette représentation est la détermination des coordonnées polytopiques : elle permettent de calculer les matrices d'état du système à chaque instant en fonction de la valeur des paramètres. En général, elles ne sont pas uniques. Pour le comprendre, nous exprimons le problème sous la forme mathématique suivante ([11]) :

Supposons que l'on ait  $r$  paramètres variants, et  $N$  sommets  $P_i$  (des matrices système) définissant le polytope. Chaque sommet  $P_i$  est caractérisé par un vecteur  $\pi_i$ , à  $r$  coordonnées dans l'espace des paramètres. Pour un point (une matrice système) appartenant à  $co(P_i, i \in \{1, N\})$ , caractérisé par la donnée des paramètres  $\theta$ , on veut déterminer les réels  $\alpha_i$  tels que :

1. ils sont tous positifs  $\forall j, \alpha_j > 0$  (le point se trouve à l'intérieur du polytope) ;
2. leur somme vaut 1 :  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$  ;
3. ils vérifient la relation :  $\theta = \sum_{i=1}^N \alpha_i \pi_i$

On dispose ainsi de  $r+1$  équations linéaires :  $r$  pour la relation 3, et 1 pour la condition de normalisation (relation 2). On a forcément  $N \geq r+1$  (dans le cas contraire, le problème est dégénéré).

Du coup, le problème se réduit à extraire  $r+1$  sommets d'entre  $N$ . Il existe  $C_N^{r+1}$  combinaisons possibles. Dans deux cas, une solution simple existe :

- le cas affine, où les sommets sont placés de façon particulière, aux sommets d'un hypercube. Les coordonnées sont calculées par itération, en fonction des distances relatives à chaque sommet.
- le cas d'un simplexe : on a  $N=r+1$  sommets. Donc  $r+1$  équations pour  $r+1$  inconnues, ce qui peut être résolu par une inversion de matrice.

Cette représentation est plus raffinée que la représentation affine, et permet la modélisation de systèmes plus complexes. C'est celle que nous utiliserons pour la synthèse à gains programmés, dans le cadre de notre problème de stabilisation.

### III.1.c Représentation LFT

Une représentation plus fine encore est la représentation par transformée fractionnelle linéaire, ou LFT. Elle permet d'exprimer, de façon générale, une fonction rationnelle dépendant d'un paramètre, vectoriel ou scalaire ; elle intervient donc naturellement dans l'expression des systèmes asservis<sup>46</sup>. En raison de sa généralité, son utilisation devient d'usage courant, et beaucoup d'outils

<sup>46</sup> Voir en annexe, page 175, pour plus de précisions.

théorique en tirent parti : la  $\mu$ -analyse et la  $\mu$ -synthèse, la synthèse de lois de commande à gains programmés par LMI. Mais elle reste complexe à manipuler : ces outils sont pour l'ingénieur difficiles d'approche.

Le système LPV précédent (B.39) admet une représentation LFT, voir figure B.44, si on peut écrire la relation (B.48), avec  $P'$  une matrice de taille convenable, donnée par (B.49).

$$P(\theta) = F_u(P', \theta) \quad (\text{B.48})$$

$$P' = \begin{pmatrix} A & B_\theta & B_u \\ C_\theta & D_{\theta\theta} & D_{\theta u} \\ C_y & D_{y\theta} & D_{yu} \end{pmatrix} \quad (\text{B.49})$$

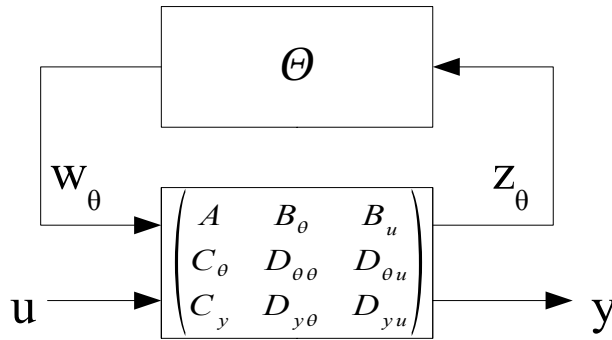


Figure B.44 Schéma de principe de la représentation LFT

La nécessité d'une discrétisation dans l'application au réel comme en simulation rend son utilisation un peu plus complexe, voir [3] et [5].

Nous verrons plus loin que cette représentation, si elle permet une plus grande liberté dans la modélisation, impose certaines restrictions et nécessite des calculs plus complexes que requis par la représentation polytopique. En raison de ces difficultés d'application, elle ne sera pas utilisée par la suite. Nous en présenterons cependant l'utilisation, à titre d'ouverture, dans le paragraphe III.2.b.

### III.1.d Performance quadratique $H_\infty$ d'un système LPV

La définition de la norme infinie d'un système LTI n'est pas applicable dans le cas des systèmes à paramètres variants. Mais on peut en donner une définition pour le cas LPV qui recouvre le cas des systèmes invariants<sup>47</sup> ([11]) : on dira que la performance quadratique  $H_\infty$  d'un système LPV stable est bornée par  $\gamma$ , si pour toute trajectoire de  $\theta$  dans le domaine  $\mathcal{Q}$  :

<sup>47</sup> On peut étendre de la même façon la définition de la norme  $H_2$ .

$$\forall u \in L_2, \forall T \geq 0, \int_0^T y(t)^T y(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T u(t)^T u(t) dt \quad (\text{B.50})$$

Dans le cas où  $\theta$  est fixé, cette définition correspond à la définition de la norme  $H_\infty$ . On note  $\gamma_{H_\infty}$  la plus petite valeur de  $\gamma$  pour que l'inégalité (B.50) soit vérifiée. Cette inégalité, exprimée dans le domaine temporel, est peu utilisable dans la pratique ; avant d'accéder à une expression plus lisible, nous devons donner quelques définitions sur la stabilité.

En effet, comme pour le cas LTI, il existe un critère, basé sur la notion de LMI, permettant d'affirmer que pour un système stable,  $\gamma_{H_\infty}$  est une borne de la norme infinie. Ce critère repose, pour les systèmes LPV, sur la notion de stabilité quadratique. Une manière d'aborder la stabilité d'un système non linéaire, est de tenter de calculer une fonction des variables d'état du système, appelée fonction de Lyapounov<sup>48</sup>, qui possède certaines propriétés : elle doit être définie positive, et être décroissante le long des trajectoires temporelles du système. Une forme classique, dite quadratique, d'une telle fonction  $V$  est (B.51). Elle dépend de l'état  $x$  du système standard.

$$V(x) = x^T X x, \quad X > 0 \quad (\text{B.51})$$

Dans le cas LPV, une condition de stabilité – la décroissance de  $V$  sur les trajectoires temporelles du système – est exprimée par l'inégalité (B.52).

$$\forall \theta \in P, A^T(\theta) X + X A(\theta) < 0 \quad (\text{B.52})$$

Alors, en prolongeant de façon analogue au cas LTI, les notions de norme au cas LPV, on obtient un critère permettant de calculer une borne supérieure à la performance quadratique. Le théorème suivant détaille le calcul de la performance quadratique  $H_\infty$  pour un système LPV.

### **Théorème ([11])**

Le système LPV (B.38) noté  $P$  est quadratiquement stable sur  $\Omega$  et vérifie, pour un réel positif  $\gamma$ , la contrainte de performance :

$$\gamma_{H_\infty}(P) < \gamma \quad (\text{B.53})$$

---

<sup>48</sup> Cette définition est très rapide. Le problème de la stabilité des systèmes non-linéaires est complexe et déborde largement du cadre de ce rapport. Le lecteur est invité à se reporter à [31], qui est une référence sur ce thème.

s'il existe une matrice  $X$  strictement positive telle que :

$$\forall \theta \in \Omega, \begin{pmatrix} A(\theta)^T X + X A(\theta) & X B(\theta) & C(\theta)^T \\ B(\theta)^T X & -\gamma I & D(\theta)^T \\ C(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{B.54})$$

Ce critère s'apparente, dans le cas où  $\theta$  est constant, au lemme borné réel, qui permet aussi de définir la norme  $H_\infty$  dans le cas LTI. Mais le théorème ne donne pas de méthode pratique de calcul : il faut en effet vérifier une infinité d'inégalités pour pouvoir affirmer que la performance quadratique du régulateur est inférieure à  $\gamma$ .

Pour un système polytopique, la quantité d'inégalités à vérifier peut être fortement réduite. En effet, on montre le théorème suivant :

**Théorème ([11]) : calcul de la performance quadratique  $H_\infty$  dans le cas polytopique**

Le système LPV (B.44), noté  $P$ , est quadratiquement stable sur  $\Omega$  et vérifie, pour un réel positif  $\gamma$ , la contrainte de performance :

$$\gamma_{H_\infty}(P) < \gamma \quad (\text{B.55})$$

s'il existe une matrice  $X$  strictement positive telle que :

$$\forall i \in \{1, N\}, \begin{pmatrix} A_i^T X + X A_i & X B_i & C_i^T \\ B_i^T X & -\gamma I & D_i^T \\ C_i & D_i & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{B.56})$$

La condition ne porte donc plus sur une infinité des systèmes, mais sur un nombre de systèmes correspondant aux sommets du polytope. Ce test est donc calculable facilement sur ordinateur.

### ***III.2 Des techniques de synthèse d'un correcteur à gains programmés***

Avant de décrire les calculs nécessaires pour obtenir un correcteur à paramètres variants, revenons sur le modèle de synthèse. Dans le cas LTI, nous avons utilisé une formulation basée sur le modèle standard (B.26), lui-même LTI, qui comprend dans ses entrées des perturbations  $w$  et des

commande  $u$ , et dans ses sorties, des grandeurs à commander  $z$  et des mesures  $y$ . Dans le cas LPV, nous utiliserons une formulation analogue (nous gardons les mêmes notations) avec la différence que le modèle standard (B.57) est alors lui-aussi à paramètres variants.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta) & B_w(\theta) & B_u(\theta) \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & D_{zu}(\theta) \\ C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) & D_{yu}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad (\text{B.57})$$

Le calcul d'un correcteur à gains programmés par l'intermédiaire des LMI est basé sur la décision suivante : le correcteur recherché a le même type de représentation que le modèle standard, soit polytopique ou bien LFT. Cette hypothèse permet d'exprimer simplement les hypothèses des théorèmes des paragraphes III.2.a et III.2.b.

Nous poserons le problème de synthèse de façon similaire au cas de la synthèse  $H_\infty$  déjà exposé au chapitre II : il s'agit de former la sensibilité de la boucle fermée pour qu'elle soit conforme à certains gabarits fréquentiels, ici, quelle que soit la valeur des paramètres  $\theta$ . Alors, nous ne recherchons pas à minimiser la norme infinie du transfert entre perturbations et sorties de commande, mais nous recherchons une solution qui assure que cette norme est inférieure à  $\gamma = I$ .

$$\|T_{zw}(\theta)\|_\infty < \gamma \quad (\text{B.58})$$

Dans la pratique, on le verra plus loin, cette valeur n'est pas atteinte, et on cherchera la valeur la plus faible possible de  $\gamma$  telle que l'inégalité est vérifiée, étant entendu qu'elle sera supérieure à un.

### **III.2.a Synthèse d'un correcteur polytopique**

Nous supposons que le modèle standard (B.57) est sous forme polytopique. Le correcteur  $K$  sera donc recherché sous forme polytopique : il est défini par sa représentation d'état (B.59).

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{B.59})$$

Si on définit  $N$  correcteurs, nommés correcteurs sommets, et notés  $K_i$ , le correcteur polytopique  $K$  défini en un point  $\theta$  de l'espace  $\mathcal{Q}$  des paramètres vaut :



$$K(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\theta) K_i \quad (\text{B.60})$$

Notons  $P_i$  les systèmes sommets de  $P$ . Ils sont notés par (B.61).

$$P_i = \begin{pmatrix} A_i & B_{w,i} & B_{u,i} \\ C_{z,i} & D_{zw,i} & D_{zu,i} \\ C_{y,i} & D_{yw,i} & D_{yu,i} \end{pmatrix} \quad (\text{B.61})$$

Des hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour continuer les calculs ([11]). Il faut :

$$D_{yw}, D_{zu}, C_y, B_u \text{ sont constantes} \quad (\text{B.62})$$

$$D_{yu} \text{ est nulle}^{49} \quad (\text{B.63})$$

Les conséquences de ces hypothèses sont omises par souci de clarté<sup>50</sup>. Indiquons simplement qu'elles permettent l'écriture générale de la boucle fermée sous forme polytopique, et par suite, la possibilité d'obtenir une solution au problème de la minimisation de la performance quadratique  $H_\infty$ . Par élimination des variables du correcteur, et par application du lemme de projection, on obtient un problème de minimisation sous contraintes LMI :

### **Théorème ([11]) : existence d'un correcteur polytopiques**

Étant donné un système polytopique, vérifiant les hypothèses (B.62) et (B.63), étant données des matrices  $N_R$  et  $N_S$  définies par (B.64) et (B.65), il existe un correcteur de la forme (B.60) tel que la performance quadratique  $H_\infty$  en boucle fermée est inférieure à  $\gamma$  **si et seulement si** il existe deux matrices symétriques  $R$  et  $S$  telles que les conditions (B.66), (B.67) et (B.68) sont vérifiées.

$$N_R = \text{Ker} \begin{pmatrix} B_u^T & D_{zu}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.64})$$

$$N_S = \text{Ker} \begin{pmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.65})$$

$$R > 0, S > 0, \lambda_{\min}(RS) \geq 1 \quad (\text{B.66})$$

---

49 cette hypothèse peut être levée par transformation du correcteur.

50 voir [11] pour plus de précisions.

$$N_R^T \begin{pmatrix} A_i R + R A_i^T & B_{w,i} & R C_{z,i}^T \\ B_{w,i}^T & -\gamma I & D_{zw,i}^T \\ C_{z,i} R & D_{zw,i} & -\gamma I \end{pmatrix} N_R < 0, \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (\text{B.67})$$

$$N_S^T \begin{pmatrix} A_i^T S + S A_i & S B_{w,i} & C_{z,i}^T \\ B_{w,i}^T S & -\gamma I & D_{zw,i}^T \\ C_{z,i} & D_{zw,i} & -\gamma I \end{pmatrix} N_S < 0, \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (\text{B.68})$$

La reconstruction du correcteur est effectuée de manière semblable au cas classique de la synthèse  $H_\infty$  par les LMI, voir [3], [11].

Ces calculs sont codés dans la boîte à outils *LMI Control Toolbox* de MATLAB. Le temps de calcul nécessaire pour la résolution de ces équations représente sur un pentium III (800MHz) environ 10 minutes de calcul, pour un modèle standard d'ordre 24 avec sept sommets<sup>51</sup>.

### III.2.b Synthèse d'un correcteur LFT

Comme dans le cas polytopique, un théorème permet, à partir d'un système LPV sous forme LFT<sup>52</sup> (B.69), de calculer, s'il existe, un correcteur (B.70), lui aussi sous forme LFT. La résolution passe par la résolution d'une optimisation sous contraintes LMI.

$$F_u(P(s), \Theta(t)), \forall t \geq 0 \text{ et } \begin{cases} \Theta(t) \in \Omega \\ \Theta(t)^T \Theta(t) \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.69})$$

$$F_l(K(s), \Theta(t)) \quad (\text{B.70})$$

Le système  $P(s)$  est défini par le modèle d'état (B.71). De la même façon,  $K(s)$  est défini par le modèle d'état (B.72).

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\theta \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_\theta & B_w & B_u \\ C_\theta & D_{\theta\theta} & D_{\theta w} & D_{\theta u} \\ C_z & D_{z\theta} & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{y\theta} & D_{yw} & D_{yu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\theta \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad (\text{B.71})$$

<sup>51</sup> Conditions que l'on retrouvera par la suite, dans le problème de la stabilisation du roulis.

<sup>52</sup> Le lecteur se reportera aux annexes, page 175, pour plus de précisions sur les LFT.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_K \\ u \\ z_{K\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_K & B_{Ky} & B_{K\theta} \\ C_{Ku} & D_{Kuy} & D_{Ku\theta} \\ C_{K\theta} & D_{K\theta y} & D_{K\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_K \\ y \\ w_{K\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{B.72})$$

### Théorème ([3],[11]) : existence d'un correcteur LFT

Étant donné un système sous forme LFT (B.69), et deux matrices  $N_R$  et  $N_S$  définies respectivement par (B.73) et (B.74), un correcteur sous la forme (B.70) tel que la performance quadratique  $H_\infty$  en boucle fermée est inférieure à  $\gamma$  existe **s'il existe** quatre matrices symétriques  $R, S, L_3$  et  $J_3$  telles que les conditions (B.75) à (B.78) sont vérifiées.

$$N_R = \text{Ker} \begin{pmatrix} B_u^T & D_{\theta u}^T & D_{zu}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.73})$$

$$N_S = \text{Ker} \begin{pmatrix} C_y & D_{y\theta} & D_{yw} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.74})$$

$$R > 0, S > 0, \lambda_{\min}(RS) \geq 1 \quad (\text{B.75})$$

$$L_3 \in D_\theta, J_3 \in D_\theta, \lambda_{\min}(L_3 J_3) \geq 1 \quad (\text{B.76})$$

$$N_R^T \begin{pmatrix} AR + RA^T & RC_\theta^T & RC_z^T & B_\theta J_3 & B_w \\ C_\theta R & -J_3 & 0 & D_{\theta\theta} J_3 & D_{\theta w} \\ C_z R & 0 & -\gamma I & D_{z\theta} J_3 & D_{zw} \\ J_3 B_\theta^T & J_3 D_{\theta\theta}^T & J_3 D_{z\theta}^T & -J_3 & 0 \\ B_w^T & D_{\theta w}^T & D_{zw}^T & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} N_R < 0 \quad (\text{B.77})$$

$$N_S^T \begin{pmatrix} A^T S + S A & S B_\theta & S B_w & C_\theta^T L_3 & C_z^T \\ B_\theta^T S & -L_3 & 0 & D_{\theta\theta}^T L_3 & D_{z\theta}^T \\ B_w^T S & 0 & -\gamma I & D_{\theta w}^T L_3 & D_{zw}^T \\ L_3 C_\theta & L_3 D_{\theta\theta} & L_3 D_{z\theta} & -L_3 & 0 \\ C_z & D_{z\theta} & D_{zw} & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} N_S < 0 \quad (\text{B.78})$$

$D_\theta$  est un ensemble de matrices possédant une propriété de commutation avec un ensemble de matrices basé sur les paramètres  $\theta$  – voir [3] pour plus de précisions.

La différence fondamentale par rapport aux correcteurs polytopiques est l'absence de condition nécessaire. En effet, dans le cas polytopique, l'équivalence (« si et seulement si ») permet d'aff-

firmier que s'il existe un correcteur, alors il existe une solution aux équations pour une performance  $\gamma$  donnée. La version négative est plus instructive : s'il n'existe pas de solution aux équations (B.66) à (B.68), alors il n'existe pas de correcteur. Dans le cas LFT, cette interprétation n'est plus possible, et il peut donc exister un correcteur qui donne une performance quadratique  $\gamma$ , quand bien même les équations précédentes n'auraient pas de solution.

Les complexités liées à la résolution des équations nous ont dissuadé d'utiliser cette représentation dans la suite de notre travail ; elle en représente néanmoins un prolongement logique et intéressant. Le lecteur intéressé pourra se rapporter à la thèse de Jean-Marc Biannic ([11]) et à l'ouvrage plus pédagogique [2].

### ***III.3 Synthèse d'un correcteur polytopique : application à la stabilisation en roulis***

La théorie, présentée dans le paragraphe précédent (III.2), détaille le calcul d'un correcteur à gains programmés à partir de la mise sous forme standard polytopique du problème de commande avec des paramètres variant. Nous allons l'appliquer maintenant à notre problème de stabilisation en roulis d'un navire, pour obtenir un régulateur de type  $H_\infty$  ; les notations utilisées pour les pondérations et les paramètres sont celles du paragraphe II.5.

Comme pour le chapitre II, nous voulons systématiser notre approche. Elle est découpée en quatre étapes successives :

- Étape 1. Choix des paramètres variants et des points de fonctionnement (§III.3.a). Nous avons retenu deux paramètres : la vitesse du navire sur l'eau  $U_0$  et un paramètre de réglage des performances  $A_0$ . Nous expliquons ce choix au paragraphe III.3.a, puis déterminons un ensemble de points de fonctionnement auxquels le correcteur doit fonctionner. Remarquons que le choix ou l'ajout d'un autre paramètre ne change pas la généralité de l'approche.
- Étape 2. Réglage des correcteurs à chaque point de fonctionnement (§III.3.b). En fonction des points de fonctionnement choisis, on règle les pondérations (et les correcteurs) par une méthode basée sur l'optimisation multi-objectifs, développée au chapitre II.
- Étape 3. Interpolation des résultats de réglage (§III.3.c). Cette étape a pour but l'utilisation des réglages obtenus à l'étape précédente, pour former un modèle standard à paramètres variants.
- Étape 4. Construction du régulateur à gains programmés (§III.3.d et §III.3.e). À partir du modèle standard LPV calculé à l'étape 3, cette dernière étape consiste à calculer le modèle standard polytopique utilisable pour la synthèse (§III.3.d), puis le régulateur lui-même (§III.3.e), polytopique lui-aussi, à partir d'outils existant, évoqués dans les paragraphes précédents.

Nous analysons ensuite les résultats de la synthèse et donnons enfin des résultats de simulation au paragraphe .

#### ***III.3.a Choix des points de fonctionnement***

La première étape consiste à choisir les paramètres que nous allons utiliser, et ensuite à définir les points de fonctionnement de référence.

Les variations de la vitesse du navire par rapport à l'eau ont une influence très importante. Il est donc normal de considérer ce paramètre comme variant dans le calcul de la loi de commande à gains programmés.

Les mesures des autres paramètres considérés jusqu'ici, angle de rencontre et état de mer, sont possibles par l'intermédiaire de capteurs dédiés (radar étudiant la surface de l'eau) ou par l'analyse des mouvements du navire.

Nous avons cependant, en première approche, considéré un autre paramètre : d'une part pour mettre au point notre méthode, et d'autre part parce que les pondérations actuellement utilisées dans le cadre  $H_\infty$  ne permettent pas l'adaptation complète à ces paramètres mesurés. Son choix est basé sur la remarque suivante : faire varier la demande de stabilisation aux actionneurs permet de faire varier l'agitation des actionneurs, pour par exemple réduire les saturations des actionneurs sur des états de mer élevés, réduire la consommation d'énergie, réduire l'émission de bruits, ou éviter la cavitation. Nous avons donc étudié l'intérêt de faire varier un paramètre représentant la qualité d'atténuation de la perturbation en roulis. Il s'agit de l'amortissement  $z$  du gabarit  $W_{II}$  (voir au paragraphe II.5.b page 90), permettant de faire varier la forme de la pondération. Ce paramètre est d'interprétation difficile : il est petit et décimal. Pour permettre une meilleure interprétation des variations de la qualité d'atténuation, nous avons aussi utilisé la profondeur du puits de la pondération, notée  $A_0$ , pour disposer d'un coefficient plus intelligible. Les deux variables  $z$  et  $A_0$  sont liées, de façon approchée, par une relation du second ordre :  $z = a_2 A_0^2 + a_1 A_0 + a_0$ .

Les points de fonctionnement sont finalement définis par la donnée de ces deux paramètres variants : la vitesse  $U_0$  et l'amortissement  $z$  du gabarit  $W_{II}$  (ou bien la qualité d'atténuation  $A_0$ ). La vitesse peut varier entre 10 et 25 noeuds, et la qualité d'atténuation  $A_0$  entre<sup>53</sup> 2 et 8 – l'amortissement  $z$  vaut respectivement 0.08237 et 0.41069. Pour ne pas avoir une charge de calcul trop importante, et néanmoins disposer de réglages précis, nous avons choisi les points de calcul répartis suivant une grille dont les coordonnées sont les suivantes :  $U_0$  vaut 10, 15, 20 ou 25 noeuds ;  $A_0$  vaut 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8. Ce qui fait au total 28 points de fonctionnement, voir figure B.45. Nous verrons par la suite que ce nombre sera réduit.

### **III.3.b Réglage des correcteurs à chaque point de fonctionnement**

L'étape suivante consiste à calculer, à chaque point de fonctionnement défini, les pondérations conduisant à un bon correcteur.

---

<sup>53</sup> Ce qui correspond à une profondeur du puits située à -8dB et -18dB, respectivement.

Il faut remarquer que les performances de stabilisation sont déjà largement fixées à l'avance par le choix des pondérations, donc en particulier par  $z$  (ou bien  $A_0$ ). Vouloir optimiser la réduction du roulis n'est alors pas judicieux. Nous avons donc opté pour une stratégie de réglage différente de celle du paragraphe II.3, mais toujours basée sur la mise sous forme d'un problème d'optimisation multi-objectifs : le problème d'optimisation diffère de celui exposé au paragraphe II.3.b par les points suivants :

1. la variable  $A_0$  n'est pas une variable de conception,
2. nous ne minimisons plus la puissance du signal de roulis.

Le problème est ainsi réduit à deux objectifs<sup>54</sup> – l'utilisation des actionneurs et la répartition de la commande – et deux variables de réglage – les hauteurs des pondérations en utilisation des actionneurs.

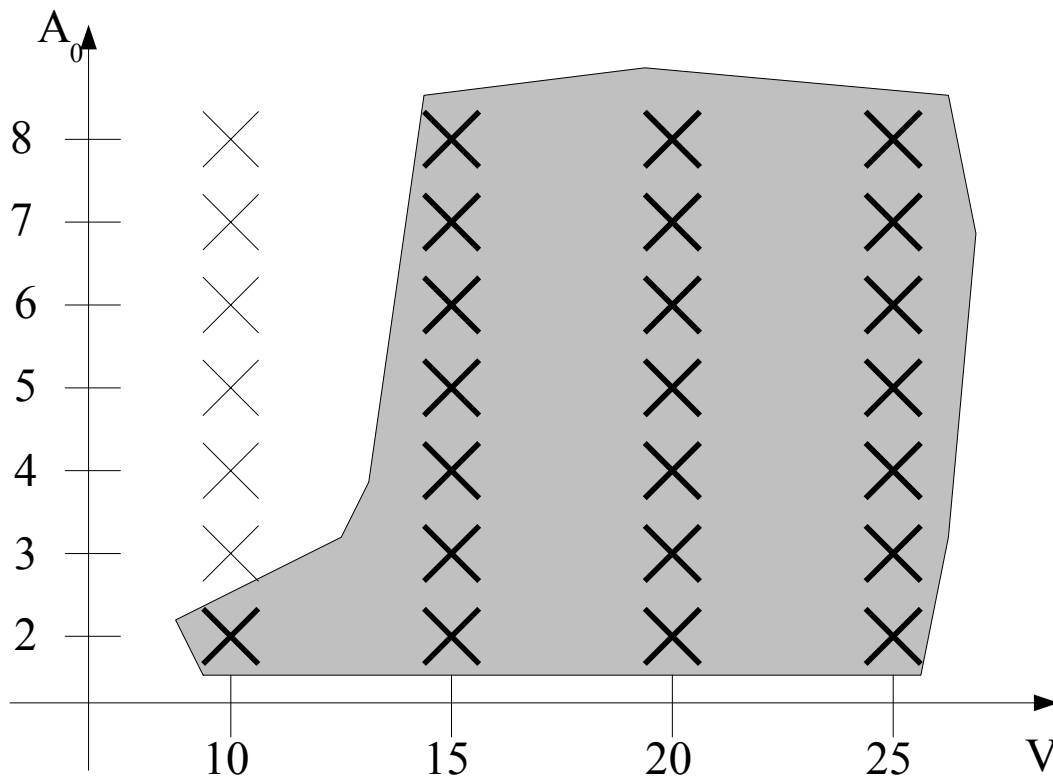


Figure B.45 Points admissibles pour le calcul d'un correcteur, en fonction de la vitesse  $U_0$  du navire et de la qualité d'atténuation  $A_0$ .

<sup>54</sup> Il ne faut pas conclure pour autant que l'on ne cherche pas à atténuer le roulis. Ceci est réalisé en choisissant un gabarit qui modèle le transfert entre mouvement de perturbation et mouvement de roulis, mais ici nous ne cherchons plus à rendre le puits le plus profond possible.

Il s'agit donc de régler les variables  $a_M$  et  $d_{MI}$ , respectivement la hauteur de la pondération d'utilisation des ailerons de stabilisation et de la pondération d'utilisation des gouvernails pour la stabilisation du roulis (voir paragraphe II.5.b), pour optimiser simultanément la puissance utilisée par les actionneurs et l'indice de répartition de la commande. Ils sont optimisés par exploration systématique de leur intervalle de variation. Cette méthode, certes brutale, permet de simplifier les calculs et de réduire le temps de réglage de façon importante.

Les paramètres résultant de l'optimisation varient peu en fonction de la vitesse :  $a_M$  et  $d_{MI}$  sont constants pour dix et quinze nœuds, ainsi que pour vingt et vingt-cinq nœuds ; et pas du tout en fonction de la qualité d'atténuation demandée. Leur faible variation sur l'ensemble des vitesses simplifie l'interpolation des modèles standards.

Il faut noter que le résultat de cette étape est le réglage des pondérations, et non les correcteurs eux-mêmes. En effet, le calcul des correcteurs permet, certes, d'accéder aux différents critères de l'optimisation (performances de stabilisation du roulis, marge de retard, etc.), mais dans la suite, ce seront les pondérations qui seront utilisées, car associées à la modélisation du système dynamique, elle permettent de calculer le modèle standard LPV, qui sert au final à faire le calcul du correcteur à gains programmés.

### ***III.3.c Interpolation des résultats de réglage***

Afin d'obtenir un modèle standard linéaire à paramètres variants, la troisième étape consiste à calculer les coefficients d'une formule d'interpolation, à partir des modèles standards à chaque point de fonctionnement calculés précédemment.

La formule choisie est la suivante :

$$P(\theta) = P_0 + P_1 U_0 + P_2 U_0^2 + P_3 z \quad (\text{B.79})$$

Les coefficients sont calculés par une méthode des moindres carrés (basée sur [40]). Cette étape est importante pour la suite, car il faut conserver dans le régulateur final les performances obtenues à chaque point de fonctionnement.

Les pondérations sont définies dans le domaine fréquentiel. Le passage en espace d'état et la variation de leurs pôles est délicate à manipuler. On peut pour éviter les problèmes numériques utiliser une forme canonique figée, typiquement la forme canonique de commandabilité.



Le résultat de cette étape est le modèle LPV  $P$  (B.80), paramétré par  $\theta=(U_0, U_0^2, z)$ .

$$P: \begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta) & B_w(\theta) & B_u \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad (\text{B.80})$$

### III.3.d Calcul du modèle standard polytopique

La première phase de la quatrième étape est la construction du modèle standard variant, sous forme polytopique, à partir de la formule interpolée de  $P$  (B.80). Comme le système polytopique est défini par ses sommets, nous devons les choisir correctement pour assurer que le modèle est représentatif de notre système et qu'il n'est pas trop conservatif. Ceci peut être fait par choix direct des sommets, ou par un algorithme dédié (voir [11]). Nous avons ici opté pour la première approche.

Afin d'expliquer sa construction, remarquons d'abord que notre modèle (B.80) peut être vu comme un modèle affine (B.81) fonction de trois coefficients, nommés  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , et  $\theta_3$ . Rappelons que si le domaine  $\Omega$  de variation des paramètres est un polytope, alors, il existe un modèle polytopique non conservatif – et dont les sommets sont les images des sommets du polytope  $\Omega$ .

$$P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \theta_3 P_3 \quad (\text{B.81})$$

Nous utilisons les notations suivantes :

- $\theta_1$ , représentant la vitesse  $U_0$ ,
- $\theta_2$ , représentant le carré de la vitesse  $U_0^2$ ,
- et  $\theta_3$ , représentant l'amortissement de la pondération en sensibilité de roulis,  $z$ .

Pour le système physique, les deux variables  $\theta_2$  ( $=U_0^2$ ) et  $\theta_3$  ( $=z$ ) prennent des valeurs dépendantes du premier paramètre  $\theta_1$  (la vitesse  $U_0$ ) (voir les figures B.46 et B.47) :  $\theta_2$  dépend directement de  $\theta_1$  et  $\theta_3$  prend ses valeurs dans un intervalle dont les bornes dépendent de  $\theta_1$ . Le domaine de variation  $\Omega$  des paramètres est donc (B.82).

$$\Omega = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \theta_1 \in [10; 25], \theta_2 = \theta_1^2 \text{ et } \theta_3 \in I_3(\theta_1)\} \quad (\text{B.82})$$

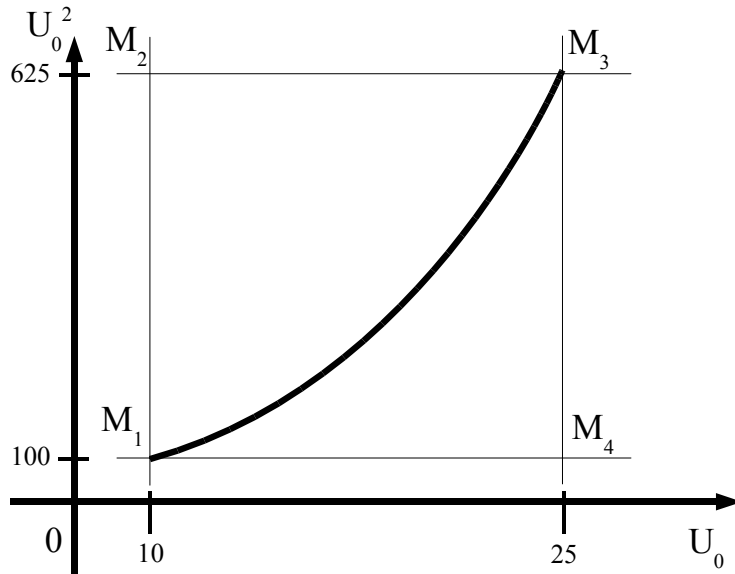


Figure B.46 Points sommets du polytope affine dans le cas de la vitesse

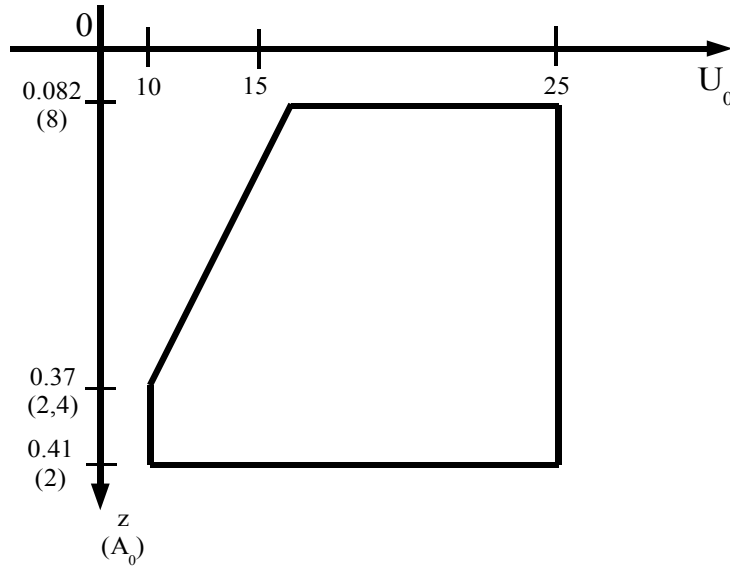


Figure B.47 Variations de la qualité d'atténuation avec la vitesse

Le domaine  $\Omega$  n'est pas convexe. Il faut donc définir un recouvrement polytopique de  $\Omega$  par un domaine convexe. Si l'on prend un domaine  $\Omega_1$  de la forme (B.83), ce qui correspond à modéliser la dépendance de  $\theta_2$  dans  $\theta_1$  par l'appartenance du couple  $[\theta_1, \theta_2]$  à l'intérieur du carré défini par les quatre points  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  et  $M_4$  de la figure B.46, le domaine est très large et se révèle en pratique très conservatif au point qu'il n'existe pas de solution acceptable au problème de la synthèse à gains programmés. Remarquons que ce domaine est convexe, et qu'il peut être exprimé sous forme de polytope à partir de points sommets bien choisis.

$$\Omega_1 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \theta_1 \in [10; 25], \theta_2 \in [100; 625] \text{ et } \theta_3 \in I_3(\theta_1)\} \quad (\text{B.83})$$

Une analyse plus fine de la structure de l'espace de variation des coefficients est nécessaire, voir figure B.48, pour représenter la dépendance de  $\theta_2$  en fonction de  $\theta_1$ . En utilisant des points judicieusement choisis, le couple de paramètre  $[\theta_1, \theta_2]$  appartient au polytope formé par les points  $N_1$ ,  $N_2$ , et  $N_3$  de la figure B.48. On garde également la variation de la qualité d'atténuation en fonction de  $\theta_1$  (la vitesse  $U_0$ ).

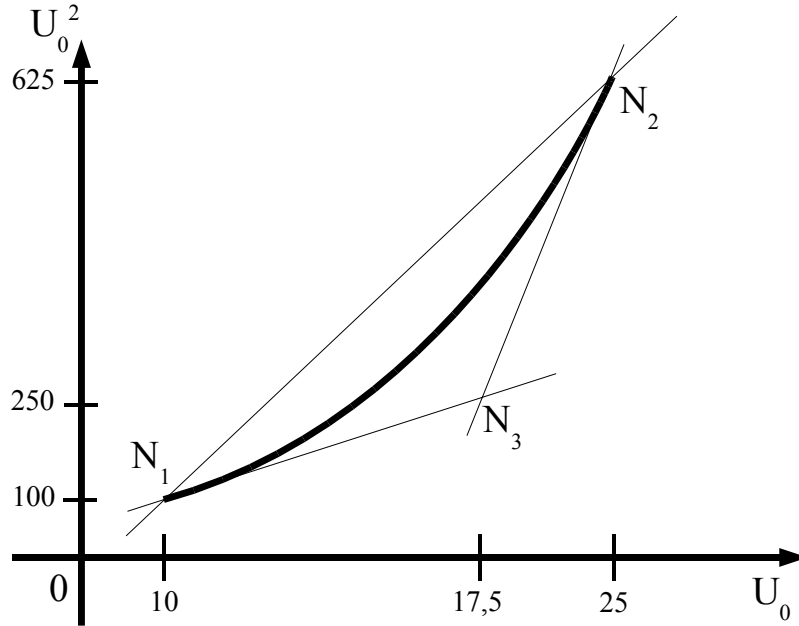


Figure B.48 Points sommets du polytope amélioré dans le cas de la vitesse

Ce nouveau domaine  $\Omega_2$  résulte encore en un système polytopique conservatif, mais nettement moins que  $\Omega_1$ . Le choix final des points sommet est résumé dans la table B.10 ; voir également la figure B.49. Les points  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  de la figure B.48 correspondent respectivement aux points  $P_1$ ,  $P_3$  et  $P_2$  de la figure B.49.

$$\Omega_2 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \text{co}\{P_i, i \in \{1, 7\}\}\} \quad (\text{B.84})$$

Point	$\theta_1 (U_0)$	$\theta_2 (U_0^2)$	$\theta_3 (z)$	$A_0$
P <sub>1</sub>	10	100	0.41069	2
P <sub>2</sub>	17,5	250	0.41069	2
P <sub>3</sub>	25	625	0.41069	2
P <sub>4</sub>	25	625	0.08237	8
P <sub>5</sub>	15	225	0.08237	8
P <sub>6</sub>	20	375	0.08237	8
P <sub>7</sub>	10	100	0.3716	2,4

Table B.10 Valeur des coordonnées des points sommets choisis pour la construction du modèle standard polytopique

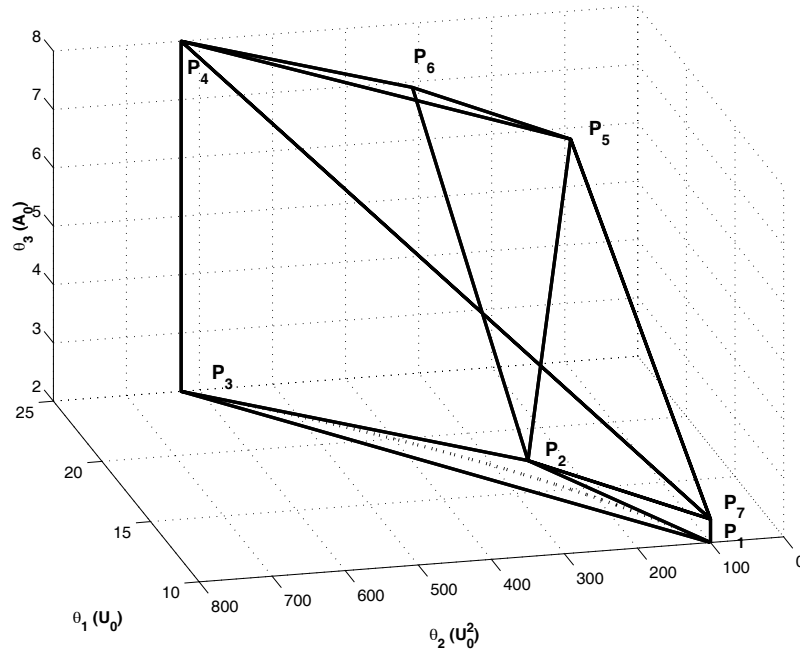


Figure B.49 Approche graphique du domaine  $\Omega_2$  utilisé dans la construction du modèle polytopique

### III.3.e Calcul du correcteur polytopique

La deuxième phase de cette quatrième et dernière étape est le calcul du correcteur polytopique à partir du modèle standard polytopique. Cette étape est décrite au paragraphe III.2.a. Elle est réalisée en deux temps : d'abord la vérification qu'à chaque point sommet du système standard polytopique correspond un correcteur utilisable.

Les résultats obtenus à chaque point de fonctionnement sont donnés à la table B.11. Dans chaque cas, la performances quadratique (la norme  $H_\infty$ ), qui est ici la mesure du respect des gabarits, est inférieure à 1,15.

Point	$\gamma$
P <sub>1</sub>	1,09
P <sub>2</sub>	1,01
P <sub>3</sub>	0,97
P <sub>4</sub>	1,08
P <sub>5</sub>	1,16
P <sub>6</sub>	1,11
P <sub>7</sub>	1,12

Table B.11 Valeur des performances quadratiques  $H_\infty$  obtenues à chaque point sommet du polytope

Ensuite, la synthèse proprement dite (voir le théorème à la page 140) donne une performance quadratique  $H_\infty$  finale de 1,65. Cette valeur est bien supérieure aux valeurs de la performance quadratique obtenue pour chacun des sommets, voir table B.11. Ce qui signifie que le correcteur final obtenu n'atteint pas les performances qu'on lui a fixées. Nous constatons en effet sur le transfert de sensibilité en roulis, figure B.50, pour une vitesse de 25 noeuds et une qualité d'atténuation de 8, que le gabarit n'est pas respecté en hautes fréquences, alors qu'il l'était avant la synthèse polytopique. La conséquence prévisible est une diminution des performances par rapport aux correcteurs du chapitre II au même point de fonctionnement ; nous le constaterons au paragraphe III.4.

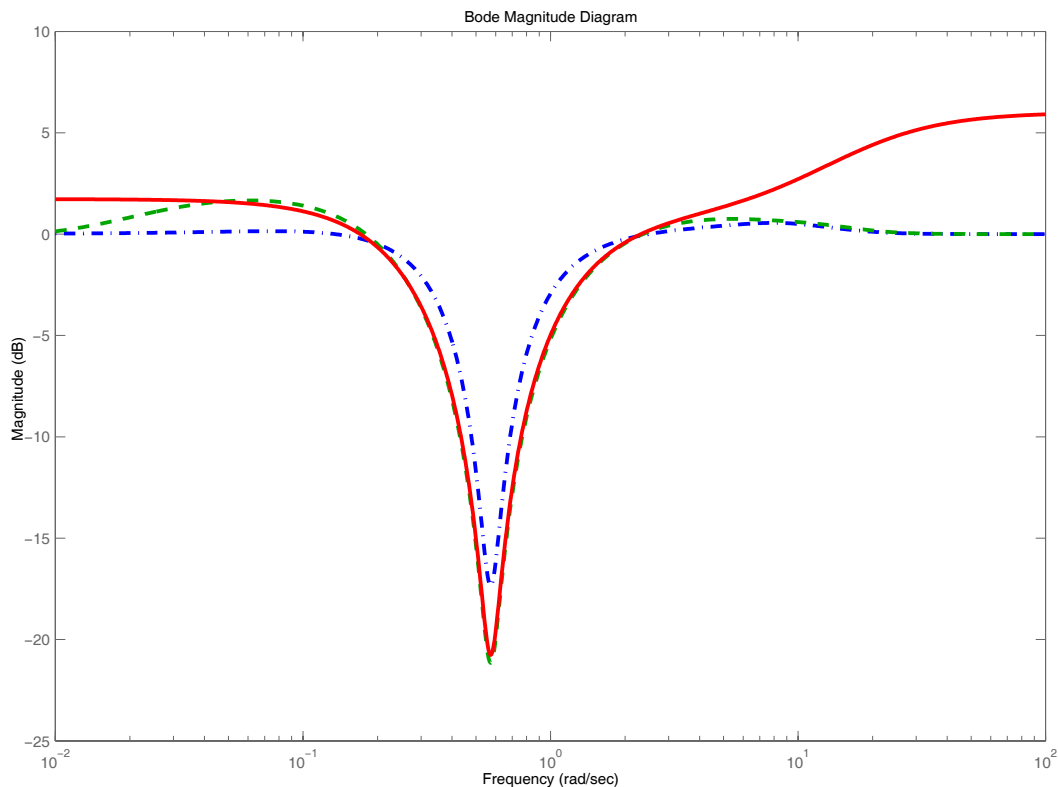


Figure B.50 Transferts de sensibilité en roulis en boucle fermée obtenus avec le correcteur  $H_\infty$  obtenu à 25 noeuds avec  $A_0=8$  (tirets), et avec le correcteur polytopique à 25 noeuds pour  $A_0=8$  (trait mixte tirets-points). Dans le cas polytopique, la sensibilité se trouve au dessus du gabarit utilisé pour former le système standard (trait plein) – différence maximale : 3.4dB, soit une amplification de 1.48.

Les sources de conservatisme peuvent être multiples, et nous n'avons pas déterminé exactement son origine. Notons cependant que :

- nous avons utilisé pour le modèle standard une représentation polytopique que nous savons conservative, voir paragraphe III.1.b. Nous représentons dans notre système des modèles qui n'ont pas de signification physique,
- le type de synthèse utilisé nécessite la résolution simultanée de  $2N$  LMI – (B.67) et (B.68) en  $N$  points – par les mêmes matrices  $R$  et  $S$ , voir le théorème à la page 140. Ici  $N$  vaut 7, le nombre de sommets du polytope. La même synthèse dans le cas  $H_\infty$  correspond à un seul sommet, soit 2 LMI. Les degrés de liberté utilisés dans la synthèse  $H_\infty$  ne sont potentiellement plus disponibles dans le cas polytopique.

Le correcteur polytopique obtenu est néanmoins utilisable, et nous le verrons au paragraphe suivant, bien qu'il ne soit pas entièrement satisfaisant.

### **III.4 Application en simulation**

Avant d'appliquer en simulation (et *a fortiori* au réel) nos résultats, il est nécessaire de résoudre un problème, celui de l'implantation sur un calculateur embarqué.

Dans la suite logique de l'ensemble de ce rapport, nous présentons ensuite nos résultats de simulation. Nous montrons d'abord l'application du correcteur à gains programmés en simulation, en présence de paramètres variants, et l'intérêt de faire varier les paramètres quand les conditions d'environnement changent. Puis nous montrons les résultats obtenus en comparaison avec les correcteurs  $H_\infty$  et PID optimisés à chaque point de fonctionnement.

#### **III.4.a Application du correcteur en temps discret**

Les correcteurs  $H_\infty$  ont tous été calculés en temps continu, et c'est aussi le cas du correcteur à gains programmés. Cependant, dans l'application au réel la commande ne peut être réalisée qu'en temps discret. Il faut donc en tenir compte dans la simulation. La manière de discrétiser les correcteurs est importante : le passage continu discret implique que les dynamiques que l'on souhaite discrétiser soient admissibles et que les déformations du gain du correcteur ne soient pas trop importantes.

Parmi les méthodes classiques pour la discrétisation citons : l'approche d'Euler, la méthode de Tustin et la méthode du bloqueur d'ordre zéro. Il n'y a pas de transformation parfaite. L'idéal serait d'effectuer la synthèse en temps discret, mais la manipulation des pondérations est plus délicate.

Nous supposons disposer des quatre matrices de la représentation d'état continue (B.85).

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B y \\ u = C x + D y \end{cases} \quad (\text{B.85})$$

Les représentations obtenues par les méthodes d'Euler et de Tustin correspondent à une intégration approchée de la dynamique continue sur un pas de temps, respectivement par la méthode des rectangles et par la méthode des trapèzes. Ces deux méthodes de discrétisation ont une limite acceptable sur la position des pôles les plus rapides du correcteur, analogue à la fréquence de Shannon (B.86).

$$\omega_{max} < \frac{2}{\Delta t} \quad (\text{B.86})$$

Elles reviennent à approximer, dans la solution du système dynamique (B.85), une exponentielle de matrice, par deux expressions différentes, voir (B.87) et (B.88).

$$\exp(A \Delta t) \simeq I + A \Delta t \quad (\text{B.87})$$

$$\exp(A \Delta t) \simeq \left( I - \frac{\Delta t}{2} A \right)^{-1} \left( I + \frac{\Delta t}{2} A \right) \quad (\text{B.88})$$

Dans le cas où un des pôles de la représentation continue est au delà de la fréquence de Shannon, la discrétisation d'Euler produit des pôles en dehors du cercle unité, donc instables ; de même pour la discrétisation de Tustin. Une solution acceptable est de passer par la troisième méthode citée, à savoir un bloqueur d'ordre zéro.

Le principe est de calculer les matrices phi et delta de la représentation d'état discret suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma y_k \\ u_k = C x_k + D y_k \end{cases} \quad (\text{B.89})$$

On calcule ainsi :

$$\begin{aligned}\Phi &= \exp(\Delta t A) \\ \Gamma &= \int_{t=0}^{\Delta t} \exp((\Delta t - t)A) B dt\end{aligned}\tag{B.90}$$

À cause de sa construction, les pôles de la matrice  $\Phi_k$  sont effectivement tous dans le cercle unité. Cette méthode permet donc d'assurer la stabilité du correcteur discrétisé, sans pour autant garantir que le gain, notamment près de la fréquence de discrétisation, ne sera pas déformé. L'expérience montre que les résultats obtenus sont satisfaisants, sans qu'il soit nécessaire d'utiliser la méthode du bloqueur d'ordre 1.

Les matrices de la version discrète d'un correcteur LTI peuvent être calculées hors ligne, connaissant la période d'échantillonnage. Le problème vient dans notre cas que les matrices de la représentation d'état du correcteur sont variables en fonction des paramètres, et donc du temps, et que par conséquent, leur valeur doit être actualisée périodiquement.

Dans le cas général de paramètres ayant une vitesse de variation arbitrairement rapide, les matrices doivent être mises à jour à chaque pas de temps. C'est la stratégie adoptée ici, bien que très gourmande en calculs, parce que la plus facilement à implanter en simulation. Néanmoins, elle n'a pas posé de problème en termes de charge de calcul, mais devrait être modifiée pour l'implantation sur un ordinateur embarqué, pour lequel les questions de charge de calcul sont cruciales.

#### ***III.4.b Outil de simulation***

Les simulations temporelles ont été obtenues sur le simulateur présenté au paragraphe II.6.

#### ***III.4.c Variations des paramètres pendant une simulation***

Les paramètres utilisés dans la programmation du correcteur sont respectivement la vitesse effective du navire qui est un paramètre de la dynamique, et le coefficient  $z$ , utilisé comme paramètre de réglage.

D'après la synthèse, des variations arbitrairement rapides des paramètres ne déstabilisent pas la boucle fermée. Nous présentons des simulations montrant la variation des paramètres, lente dans le cas de la vitesse, infiniment rapides dans le cas de  $z$  : la vitesse à la figure B.51 ; et le coefficient  $z$  à la figure B.52.



On constate dans le premier cas que l'activité des gouvernes baisse au passage entre 10 et 20 noeuds. Cela correspond à une augmentation de l'efficacité des gouvernes, et donc à une diminution, à qualité d'atténuation constante, de leur activité. La variation de la vitesse est limitée, pour respecter les lois de la mécanique : la vitesse d'un navire de ce gabarit (3000 tonnes) ne peut pas varier trop vite.

Dans le second cas, au contraire, l'activité des gouvernes augmente quand on augmente la qualité d'atténuation<sup>55</sup> de 2 à 8. Cela correspond, à vitesse constante (donc efficacité des actionneurs constante également) à une meilleure stabilisation du roulis, ce que l'on constate sur le tracé temporel du signal de roulis. La variation de la qualité d'atténuation est ici infiniment rapide, mais ne provoque pas de problème d'instabilité.

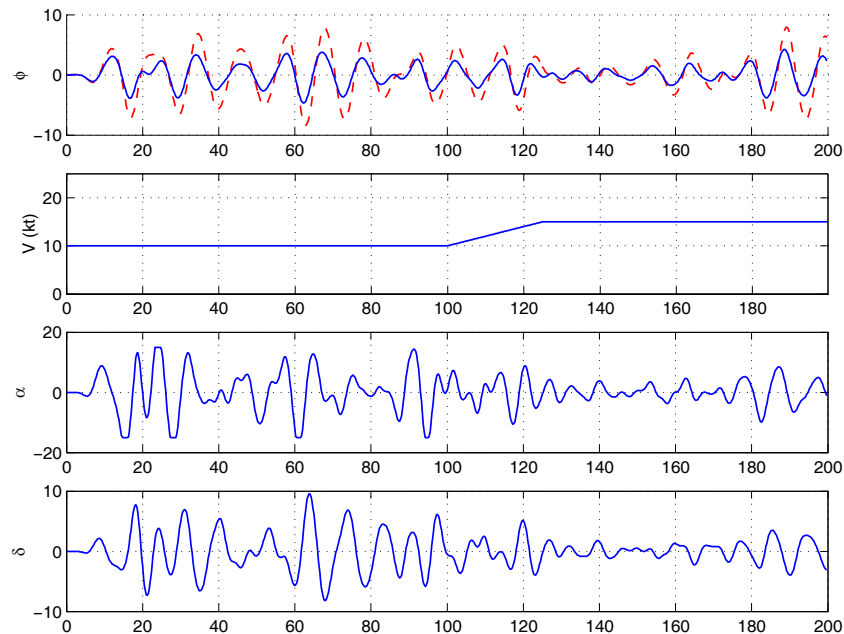


Figure B.51 Simulation temporelle en boucle fermée par le correcteur polytopique (pleine) et en boucle ouverte (en tirets). État de mer 5, angle de rencontre  $90^\circ$  - qualité d'atténuation constante égale à 2 - vitesse variable entre 10 et 15 noeuds

<sup>55</sup> Le coefficient  $z$  passe respectivement de 0.41 à 0.08.

### III.4.d Intérêt de l'adaptation

Le correcteur à gains programmés permet de s'adapter au cours d'une évolution du navire à deux paramètres, la vitesse et la qualité d'atténuation.

Nous avons déjà montré l'intérêt de l'adaptation à la vitesse au chapitre II. Nous présentons maintenant l'utilisation de la vitesse comme paramètre de réglage, pour adapter le comportement du correcteur. Pour cela, nous comparons en simulation le correcteur polytopique, noté  $P$ , donc adapté à chaque vitesse, et le correcteur  $H_\infty$  (noté  $CC$ ) optimisé pour 15 noeuds, du chapitre II. La vitesse du navire augmente de 15 à 25 noeuds à partir de  $t=250s$ . Nous présentons à la figure B.53 une partie de la simulation, représentative du comportement de la boucle fermée.

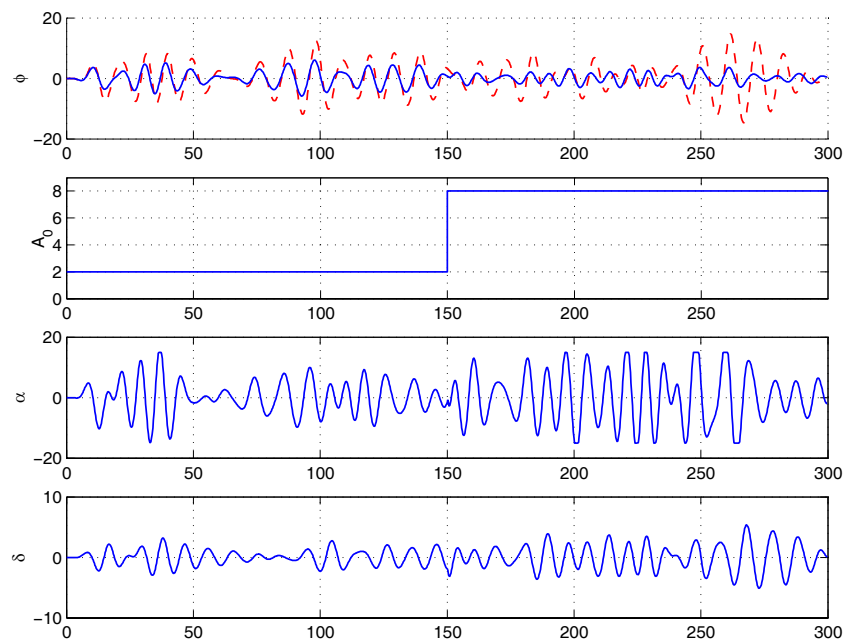


Figure B.52 Simulation temporelle en boucle fermée par le correcteur polytopique (pleine) et en boucle ouverte (en tirets). État de mer 5, angle de rencontre  $90^\circ$  - vitesse constante : 15 noeuds – qualité d'atténuation variable entre 2 et 8

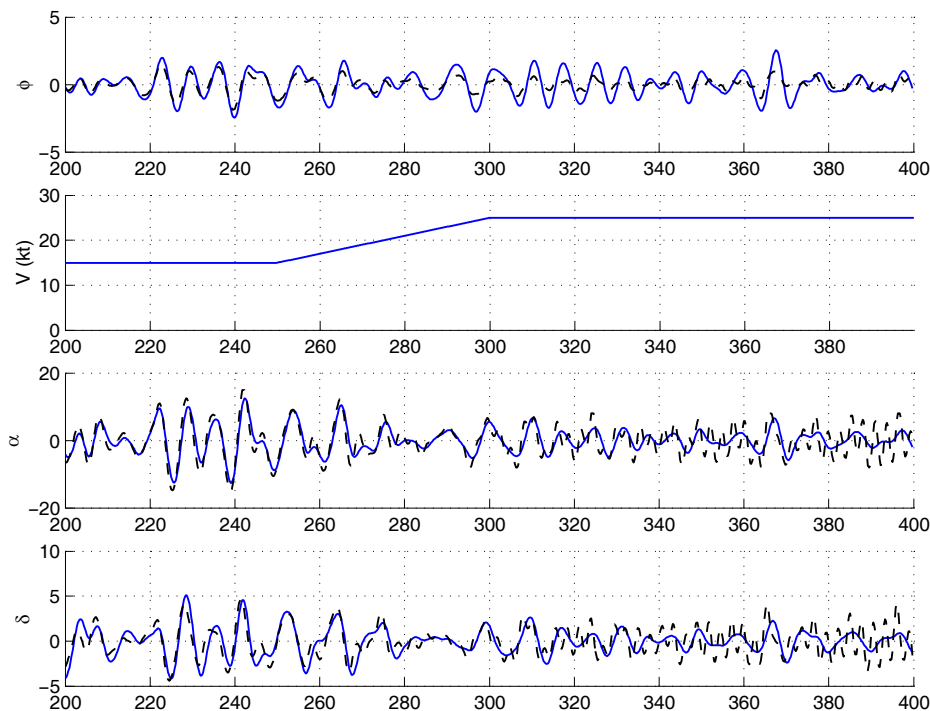


Figure B.53 Simulation temporelle en boucle fermée par le correcteur polytopique (pleine) et par le correcteur  $H_\infty$  optimisé à 15 noeuds (en tirets). État de mer 5, angle de rencontre  $90^\circ$  - vitesse variable entre 15 et 25 nœuds – qualité d’atténuation constante : 8

Si le correcteur CC est mieux adapté au point de fonctionnement auquel il a été optimisé, il ne l’est plus du tout quand la vitesse augmente : l’atténuation du roulis est toujours meilleure que celle du correcteur polytopique, mais les actionneurs (ailerons de stabilisation et gouvernails) sont très agités : ils ont des mouvements à une période d’environ 3 secondes, beaucoup plus rapide que la période du roulis du navire, et saturent très fréquemment en vitesse, au delà des spécifications du cahier des charges.

La qualité d’atténuation, elle, permet de régler la profondeur du puits de la pondération de la sensibilité en roulis. Réduire la demande de performances s’accompagne d’une baisse d’utilisation des actionneurs. On peut ainsi réduire la fréquence de saturation des actionneurs, potentiellement dommageables pour la mécanique et pour la stabilité de la boucle fermée, sur un état de mer important. Cela se fera cependant au détriment des performances.

La figure B.54 montre la comparaison des signaux temporels obtenus en appliquant le correcteur polytopique à 15 noeuds, pour des qualités d’atténuation  $A_0=2$  et  $A_0=8$ . Le correcteur pour

$A_0=8$  est plus performant que pour  $A_0=2$ . En contrepartie, la fréquence des saturations est beaucoup plus importante, et dépasse largement la limite de 2 saturations par minute (on a environ 5 saturations par minute).

L'adaptation en temps réel du paramètre  $A_0$  peut donc permettre de diminuer les fréquences de saturations des actionneurs.

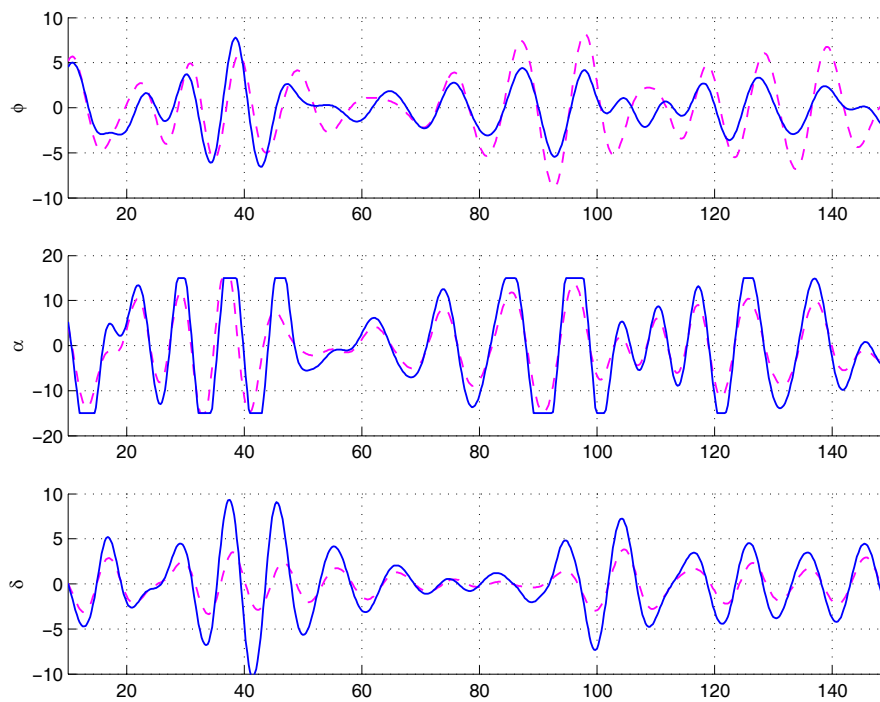


Figure B.54 Simulation temporelle en boucle fermée par le correcteur polytopique avec  $A_0=8$  (pleine) et par le correcteur polytopique avec  $A_0=2$  (en tirets). État de mer 6, angle de rencontre  $75^\circ$  - vitesse constante : 15 noeuds.

### III.4.e Comparaisons entre correcteur polytopique et correcteur statique

Afin de connaître les performances du correcteur à gains programmés calculé, nous l'avons comparé, en simulations temporelles, avec les correcteur  $H_\infty$  calculés au chapitre II (partie B). Les conditions des comparaisons sont : vitesse constante, pour un angle de rencontre fixe ( $90^\circ$ ), et un état de mer fixe également (mer 5). Nous avons effectué les simulations pour les vitesses de 10, 15, 20 et 25 noeuds.

Comme mentionné précédemment (paragraphe III.3.e), les gabarits fixés pour la synthèse polytopique ne sont pas respectés. L'objectif de cette comparaison est donc de déterminer la perte

de performance liée au passage aux gains programmés. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures B.55, B.56 et B.57.

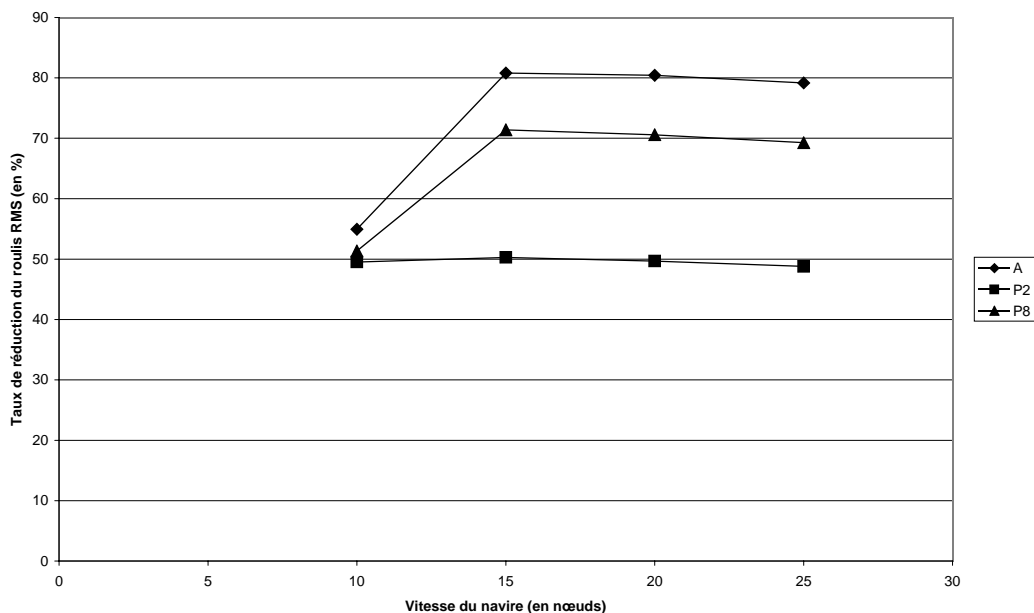


Figure B.55 Comparaison des taux de réduction du roulis obtenus avec des correcteurs  $H_\infty$  adaptés à chaque vitesse (A), et avec le correcteur à gains programmés pour cette même vitesse avec une qualité d'atténuation minimale (P2) et maximale (P8)

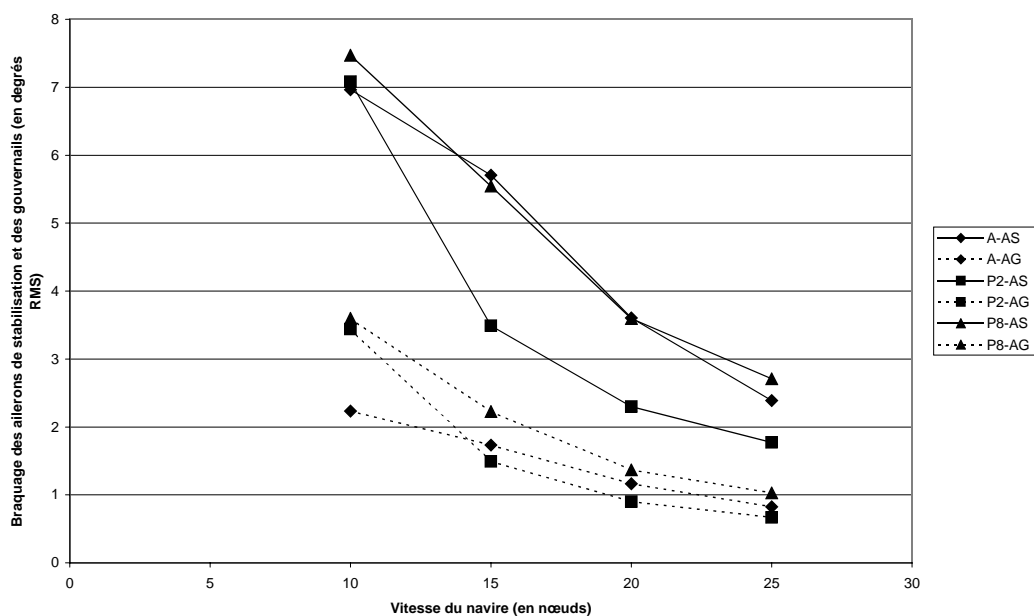
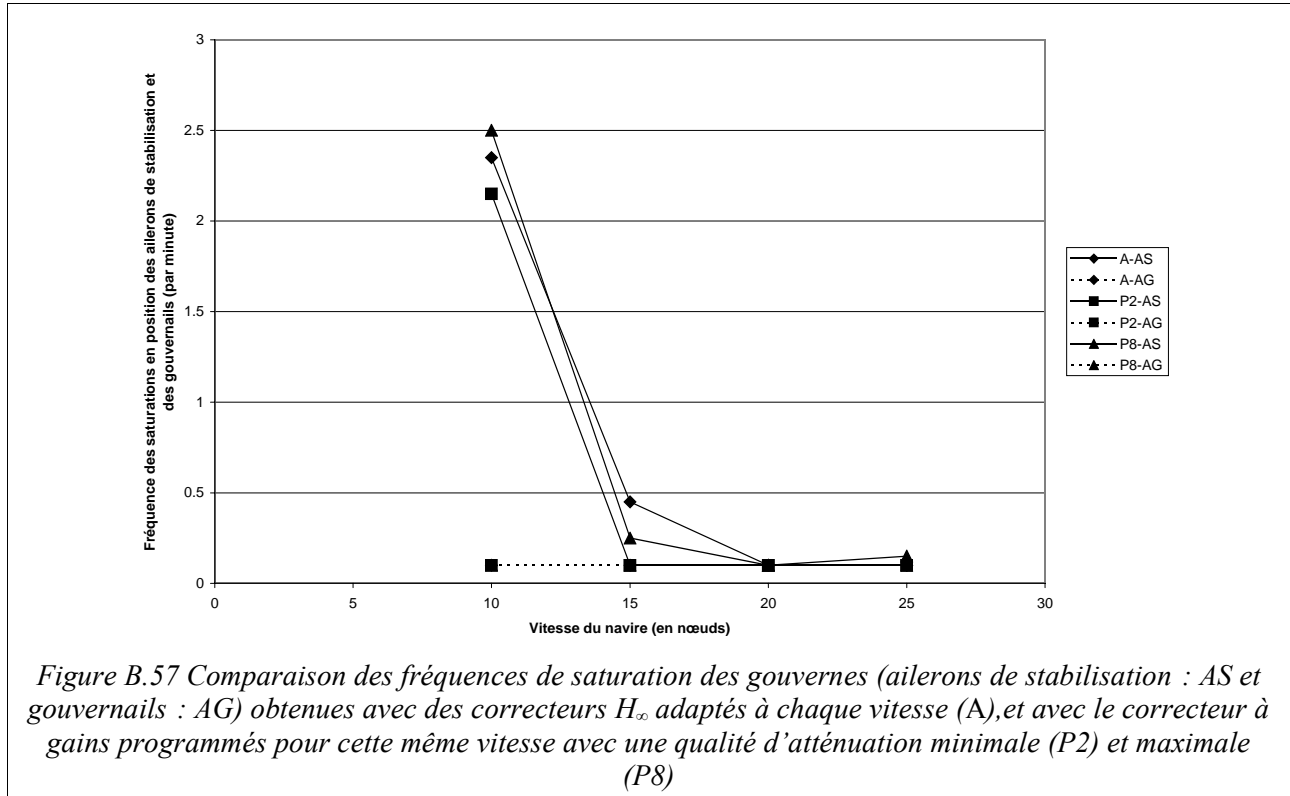


Figure B.56 Comparaison des braquages des gouvernes (ailerons de stabilisation : AS et gouvernails : AG) obtenus avec des correcteurs  $H_\infty$  adaptés à chaque vitesse (A), et avec le correcteur à gains programmés pour cette même vitesse avec une qualité d'atténuation minimale (P2) et maximale (P8)



Le correcteur polytopique a comme on s'en doutait par le calcul de la performance quadratique, des performances en réduction du roulis inférieures à celles de chaque correcteur LTI (optimisé) aux mêmes points de fonctionnement. Le correcteur polytopique utilise (pour  $A_0=8$ ) à chaque vitesse plus les actionneurs que les correcteurs adaptés, mais ne sature pas plus. Il utilise (pour  $A_0=2$ ) moins les actionneurs pour toutes les vitesses, sauf à 10 noeuds. Tous les correcteurs saturent légèrement à 10 noeuds.

### III.5 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre détaillé la théorie permettant, à partir d'une représentation spécifique d'un modèle dynamique linéaire à paramètres variants, de calculer un correcteur à paramètres variants. Le contexte est celui de la commande de type  $H_\infty$ , donc d'un modèle standard défini par la dynamique du système à commander augmentée des pondérations. Les théorèmes présentés permettent de faire les calculs dans les cas polytopiques et LFT.

La méthode de synthèse présentée s'est basée exclusivement sur la représentation polytopique, en mettant en valeur les étapes importantes sous forme d'une méthodologie en quatre étapes : le calcul des points de fonctionnement, le réglage des correcteurs aux points de fonctionnement, l'inter-

polution des modèles standard et finalement la synthèse du correcteur à gain programmés à partir d'un modèle standard polytopique. Le calcul du correcteur a mis en évidence le conservatisme de cette approche dans notre cas.

L'application du correcteur calculé est faite en simulation sur le même navire que dans le chapitre II. La variation des paramètres est possible pendant le fonctionnement du correcteur en boucle fermée, comme présenté dans les simulations temporelles. Les performances obtenues avec le correcteur polytopique sont, comme prévu lors de la synthèse, plus faibles, dans des conditions équivalentes, aux performances obtenues avec le correcteur optimisé.

Lors de la variation des paramètres, le correcteur polytopique reste néanmoins le seul à s'adapter correctement, puisque les autres correcteurs, s'ils sont optimisés à leur point de fonctionnement, ne varient pas quand le point de fonctionnement change et ont des comportements inacceptables (voir figure B.53).

Les développements effectués dans ce chapitre ont fait l'objet d'un article de conférence, soumis et actuellement en cours de relecture : [56] pour ACC 2004.

## **Partie C Conclusion**





## Résumé du travail

Nous rappelons ici les objectifs qui étaient les nôtres dans le cadre de ce travail.

Les lois de commande actuellement utilisées à bord des navires ne prennent pas en compte les informations, potentiellement disponibles, de l'environnement, issues de capteurs dédiés. Notre objectif était donc d'étudier l'intérêt de l'utilisation de ces données dans l'amélioration des lois de commande, et de proposer une solution pour intégrer ces données dans une loi de commande : autrement dit de passer d'une perturbation non mesurée à une perturbation mesurée de façon statistique.

Avant de nous intéresser à la synthèse des lois de commande, il faut un modèle, formé de deux parties : la dynamique du navire, et le modèle de la perturbation, ici la houle. Nous avons décrit, dans la partie A, les différentes étapes permettant d'obtenir un modèle de synthèse utilisable. Le modèle final est donnée au chapitre IV, partie A. Nous avons fait apparaître trois paramètres permettant de décrire les variations du comportement du navire : l'angle de rencontre des vagues, l'état de mer, et la vitesse du navire par rapport à l'eau.

Dans le cadre de la problématique, il nous a paru naturel d'utiliser des lois de commande à gains programmés, en fonction des paramètres mis en évidence. Une clef possible pour l'obtention de telles lois de commande est l'utilisation modèle linéaire à paramètres variants, car des méthodes de synthèse adéquates sont disponibles. C'est la direction qui a été choisie. Le modèle du navire est donc composé du modèle dynamique, linéaire et à paramètres variants, et du modèle des mouvements de perturbations, paramétré lui aussi.

Dans ce cadre, nous avons procédé en deux étapes : d'abord le réglage de lois de commande à des points de fonctionnement donnés, puis la synthèse gains programmés proprement dite, basée sur les réglages obtenus dans la première étape.

Nous avons donc d'abord développé une méthodologie originale de réglage (partie B, chapitre II). Elle est basée sur l'expression naturelle du problème de synthèse de la loi de commande sous la forme d'un problème d'optimisation multi-objectifs. La résolution de ce problème a été réalisée par des méthodes spécifiques, comme par exemple un algorithme génétique. Afin de déterminer l'intérêt de l'adaptation, nous avons choisi des points de fonctionnement, définis par une vitesse du navire par rapport à l'eau, un angle de rencontre des vagues et un état de mer. Nous avons ensuite appliqué la méthodologie développée à deux types de lois de commande : PID et  $H_\infty$ . Nous en avons

ensuite comparé les résultats en plusieurs points de fonctionnement. Les résultats des simulations montrent qu'il est intéressant de s'adapter aux paramètres définissant l'état de mer et à la vitesse, pour gagner en performances, éviter les saturations et minimiser la puissance dépensée.

Nous avons ensuite utilisé ces résultats pour la synthèse d'un régulateur à gains programmés pour la stabilisation du roulis (partie B, chapitre III). Nous nous sommes appuyés sur les développements maintenant classiques des méthodes basées sur les LMI, en utilisant une représentation polytopique du système LPV. L'application originale de cette méthode, en prenant en compte la vitesse du navire par rapport à l'eau et un paramètre de réglage de la qualité de la stabilisation, a montré en simulation son intérêt puisqu'on dispose ainsi d'un correcteur global, stable et variant en fonction de certains paramètres. Le correcteur calculé a montré aussi ses limites dues au conservatisme de la modélisation, et de la méthode de synthèse.

Les objectifs ont-ils été atteints ? La réponse est « en partie » :

- Nous avons obtenu une méthodologie pour faire le réglage de lois de commande en roulis, mais elle est perfectible. Nous pensons qu'elle est utilisable dans un cadre plus général.
- Le correcteur à gains programmés calculé permet de s'adapter à deux paramètres : la vitesse du navire et un paramètre de qualité d'atténuation. Il est obtenu par une méthode dont nous avons décrit les différentes étapes. Il est améliorable, tant en performances – par l'étude du conservatisme, et de la paramétrisation des pondérations –, qu'en fonctionnalités – par l'ajout d'autres paramètres de synthèse.

Notre travail s'est déroulé en milieu industriel, et a été en partie financé par l'ANRT, par une bourse CIFRE, en convention avec l'entreprise SIREHNA.

## Perspectives

Il existe des améliorations possibles, dans les différentes parties de notre travail, certaines dans des voies de recherches privilégiées et prometteuses, d'autres moins intéressantes. Nous nous efforçons ici de donner quelques éléments pour la poursuite de notre travail.

La méthodologie de synthèse développée permet actuellement de calculer des lois de commande, qui sont ensuite utilisées en simulation. Mais elle n'est pas tout à fait finie, et le plus excitant reste à faire : l'application au réel ou à échelle réduite. Il faut cependant franchir encore quelques étapes avant d'y arriver. Il sera probablement nécessaire de recalibrer le modèle de synthèse (et de simulation) pour tenir compte des décalages entre théorie et réalité, et des phénomènes non modélisés. Parmi les améliorations possibles dans la synthèse des correcteurs, l'amélioration du choix des pondérations, en permettant de faire varier la pulsation du puits de la sensibilité en roulis, peut permettre l'adaptation des correcteurs  $H_\infty$  à l'évolution du spectre des mouvements du navire. Cela permettrait de s'adapter aux changements du spectre des mouvements en fonction de l'état de mer, de l'angle de rencontre et de la vitesse. En parallèle, il peut être nécessaire d'évaluer la robustesse aux changements de période de résonance. Finalement, il faudrait comparer les lois de commande synthétisées avec des lois existantes au réel (en service sur des navires).

La synthèse à gains programmés a permis de construire un correcteur théoriquement stable, et ayant des performances correctes. Les paramètres pris en compte sont la vitesse et la « qualité d'atténuation ». La méthode utilisée pour la synthèse doit permettre le calcul de correcteurs prenant en compte d'autres paramètres. Il faut cependant faire attention au conservatisme introduit dans la construction du régulateur par la représentation polytopique. Une autre voie à explorer est la construction d'un correcteur à partir d'une représentation LFT.

À plus long terme, la maîtrise des mouvements d'un navire permettront d'améliorer substantiellement son utilisation, mais pas uniquement pour des questions de confort. Deux axes de développement semblent prometteurs dans le domaine de la construction de systèmes de stabilisation :

1. L'approche déterministe de la stabilisation, sujet très lié à la prédiction des mouvements du navire. Le développement d'un modèle fin du navire, et la prédiction des mouvements permet de traiter les non-linéarités (saturations, effets visqueux,...) de façon exacte et non spectrale comme c'est très souvent le cas actuellement. L'objectif est d'arriver à maîtriser les mouvements du

navire dans les houles ayant une très faible pulsation de rencontre. Les lois de commande de type prédictif semblent indiquées dans ce cas. On notera que l'étude de la prédiction fine des mouvements d'un navire est également très importante pour l'appontage automatique d'aéronefs (drones, hélicoptères) sur des navires.

2. La décomposition de la commande en stabilisation en deux parties : un système calcule les efforts nécessaires à la stabilisation, et un second système répartit ces efforts sur les différents actionneurs disponibles, en fonction de leur disponibilité. Cette gestion particulière de la commande des navires permet de séparer la loi de commande de la configuration d'actionneurs présente sur le navire, et assure une certaine souplesse à l'utilisateur comme au constructeur. Cette approche est déjà utilisée, avec succès, dans le domaine du positionnement dynamique.

## Références



## Références

- [1]: M.A. Abkowitz, Stability and Motion Control of Ocean Vehicles, support de cours MIT, 1969.
- [2]: D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, G. Ferreres, *Robustesse et commande optimale*, Cépaduès Editions, Toulouse, France, 1999.
- [3]: P. Apkarian, P. Gahinet, A convex characterization of gain-scheduled  $H_\infty$  controllers, *Transactions on Automatic Control*, pages 853-864, No 5, vol. 40, 1995.
- [4]: J. van Amerongen, P. G. M. van der Klugt, H. R. van Nauta Lemke , Rudder roll stabilization for ships, *Automatica*, pages 679-690, No 4, vol. 26, 1990.
- [5]: P. Apkarian, On the discretisation of LMI synthesized Linear Parameter Varying Controllers, *Automatica*, pages 655-661, No 4, vol. 33, 1997.
- [6]: Z. Ayaz, K.J. Spyrou, D. Vassalos, An improved numerical model for the study of controlled ship motions in extreme following and quartering seas, in *Actes de : IFAC Conference for Control Applications in Marine Systems*, Glasgow, Ecosse, 2001.
- [7]: J.M. Biannic, P. Apkarian, Missile autopilot design via a modified LPV synthesis technique, *Aerospace Science & Technology*, pages 153-160, No 3, 1999.
- [8]: S. Boyd, C. Barratt, *Linear Controller Design: limits of performance*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, USA, 1991.
- [9]: B. Bergeon, F. Cazaurang, N. Philippe,  $H_\infty$  design and multivariable delay margin, in *Actes de : Symposium on System Structure and Control* , Prague, République Tchèque, 2001.
- [10]: S. Bennet, Ship Stabilisation: History, in : *Concise Encyclopedia of traffic and transportation systems*, Pergamon Press, Tarrytown, NY, USA , 1991.
- [11]: J.M. Biannic, *Commande robuste des systèmes à paramètres variables. Applications en aéronautique*, Thèse de doctorat, Supaéro, Toulouse, France, 1996.
- [12]: L. Boudet, Modélisation du problème de tenue à la mer : approche fréquentielle linéaire, support de cours ENSIETA, 1999.
- [13]: S. Cluzel, *La marge de retard multivariable*, mémoire DEA, IRCCyN/Polytech'Nantes, Nantes, France, 2000.
- [14]: P. Crossland, The effect of roll-stabilisation controllers on warship operationnal performance, *Control Engineering Practice*, pages 423-431, No 4, vol. 11, 2003.
- [15]: P. Chevrel, D. Sammier, Rapport Interne, Rapport de recherche , LARGE, Saint Nazaire, France, 1999.
- [16]: W.E. Cummins, The impulse response function and ship motions, Rapport de recherche No



---

1661, David W. Taylor Model Basin (DTMB), Washington, U.S.A., 1961.

- [17]: M. Dettori, *LMI techniques for control with application to a compact disc player mechanism*, Thèse de doctorat, Université technologique de Delft, Delft, Pays-Bas, 2001.
- [18]: G. Duc, S. Font, *Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -analyse - des outils pour la robustesse*, Hermès, Paris, France, 1999.
- [19]: J.C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. Francis, State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems, *Transactions on Automatic Control*, pages 831-847, No 8, vol. 34, 1989.
- [20]: G. Duc, A. Hired, Mise en œuvre de correcteurs séquencés dans le cadre LPV, *APII-Journal Européen des Systèmes Automatisés*, pages 107-125, vol. 35, 2001.
- [21]: J.C. Dern, G. Hardier, J.P. Jung, Modélisation hydrodynamique et lois de commande du système de stabilisation du porte-avions à propulsion nucléaire, in *Actes de : Conférence de l'Association Technique Maritime et Aéronautique*, Paris, France, 1987.
- [22]: L. Fortuna, G. Muscato, S. Chillè, S. Baglio, Modelling, Identification and adaptive control of an automatic roll reduction system for a monohull ship, in *Actes de : American Control Conference*, San Francisco, USA, 1993.
- [23]: T.I.Fossen, *Guidance and Control of ocean vehicles*, John Wiley & sons, Chichester, UK, 1994.
- [24]: P. Gahinet, A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, pages 421-448, No 4, 1994.
- [25]: D.E. Goldberg, M. Kelsey, C. Tidd, Genetic Algorithm: A Bibliography, Rapport de recherche No 92208, Université de l'Illinois à Urbana Champaign, Urbana, USA, 1992.
- [26]: M.J. Grimble, M.R. Katebi, Y. Zhang,  $H_\infty$  based ship fin-rudder roll stabilisation design, in *Actes de : Ship Control and Structure Symposium*, Ottawa, Canada, 1993.
- [27]: A. Helmersson, *Methods for Robust Gain-Scheduling*, Thèse de doctorat, Université de Linköping, Linköping, Suède, 1995.
- [28]: G. Hearn, M.R. Gerald, M.J. Grimble, Robust fin roll stabiliser controller design, in *Actes de : IFAC Conference for Manoeuvring and Control of Marine Craft*, Aalborg, Danemark, 2000.
- [29]: T. Iwasaki, R.E. Skelton, All controllers for the general  $H_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state space formulas, *Automatica*, pages 1307-1317, No 8, vol. 30, 1994.
- [30]: J.M. Journée, W.W. Massie, Introduction in Offshore Hydromechanics (first edition), support de cours Delft University of technology, 2001.
- [31]: H.K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, USA, 1996.

## Références

---

- [32]: M.R. Katebi, N.A. Hickey, M.J. Grimbale, Evaluation of fin roll stabiliser controller design, *in Actes de : IFAC Conf. for Manoeuvring and Control of Marine Crafts*, Aalborg, Danemark, 2000.
- [33]: S. Kummer, G. Hardier, C. Lambert, Compensation de gîte du porte-avions Charles de Gaulle : principes et structure des lois de commande, *in Actes de : Conférence de l'Association Technique Maritime et Aéronautique*, Paris, France, 2000.
- [34]: P.G.M. van der Klugt, C. de Keizer, A new approach towards designing ship motion control systems, *in Actes de : IFAC Conference for Control Applications in Marine Systems*, Glasgow, Scotland, 2001.
- [35]: P.G.M. Van der Klugt, *Rudder Roll Stabilisation*, Thèse de doctorat, Delft University of technology, Delft, Pays-Bas, 1987.
- [36]: F. Le Mauff, G. Duc, Quelques pistes pour la retouche de correcteurs : résolution de BMI et algorithme génétique, *in Actes de : GT-commande robuste*, Bordeaux, France, 2002.
- [37]: A.R.J.M Lloyd, *Seakeeping, ship behaviour in rough weather*, Ellis Horwood, Chichester, UK, 1989.
- [38]: D.A. Liut, D.T. Mook, H.F. Van Landingham, A.H. Nayfeh, Roll reduction in ships by means of active fins controlled by a neural network, *Ship Techology Research*, pages 79-89, vol. 47, 2000.
- [39]: M.J. Lopez, J. Terron, M. Haro, Robust roll motion regulator based on IMC structure, *in Actes de : Congrès mondial IFAC*, San Francisco, USA, 1996.
- [40]: J.F. Magni, Linear Fractional Representations with a Toolbox for Use with MATLAB, Rapport de recherche No 204/2001, ONERA, Toulouse, France, 2001.
- [41]: A. Magee, J.F. LeGuen, X. Dupouy, A time domain simulation method for stabiliser fin evaluation and design, *in Actes de : STAB'97*, Varna, Bulgarie, 1997.
- [42]: B. Molin, *Hydrodynamique des structures offshore*, Editions Technip, Paris, France, 2002.
- [43]: R.A. Nichols, R.T. Reichert, W.J. Rugh, Gain Scheduling for  $H_\infty$  controllers : a flight control example, *Transactions on Control Systems Technology*, pages 69-79, No 2, vol. 1, 1993.
- [44]: W.G. Price, R.E.D Bishop, *Probabilistic of ship dynamics*, Chapman & Hall, Londres, UK, 1974.
- [45]: T. Perez, G.C. Goodwin, Constrained Control To Prevent Dynamic Stall Of Ship Fin Stabilizers, *in Actes de : IFAC Conference for Manoeuvring and Control of Marine Crafts*, Gérone, Espagne, 2003.
- [46]: T. Perez, G.C. Goodwin, R.E. Skelton, Analysis Of Performance And Applicability Of Rudder-Based Stabilizers, *in Actes de : IFAC Conference for Manoeuvring and Control of Marine Crafts*, Gérone, Espagne, 2003.

- 
- [47]: D. Quagliarella, J. Periaux, C. Poloni, G. Winter, *Genetic Algorithms and Evolution Strategies in Engineering and Computer Science*, John Wiley & sons, England, 1997.
- [48]: M.F. Renard, *Comportement sur houle régulière et irrégulière des navires amarrés*, mémoire Ingénieur, CNAM, Paris, France, 1988.
- [49]: G.N. Roberts, M.T. Sharif, A. Agarwal, R. Sutton,  $H_\infty$  optimisation techniques applied to the design of a combined steering/stabiliser system for warships, in *Actes de : Congrès mondial IFAC*, San Francisco, USA, 1996.
- [50]: J.N. Sgobbo, M.G. Parsons, Rudder/Fin Roll Stabilization of the USCG 901 Class Vessel, *Marine Technology*, pages 157-170, No 3, vol. 36, 1999.
- [51]: M.T. Sharif, G.N. Roberts, R. Sutton, Final experimental results of full-scale fin/rudder roll stabilisation sea trials, *Control Engineering Practice*, pages 377-384, No 3, vol. 4, 1996.
- [52]: H. Tanguy, G. Lebre, Stabilisation en Roulis d'un Navire de Type Frégate, in *Actes de : Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Nantes, France, 2002.
- [53]: H. Tanguy, G. Lebre, Stabilisation en Roulis d'un Navire de Type Frégate, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, pages 287-302, No 2, vol. 37, 2003.
- [54]: H. Tanguy, G. Lebre, Fin/Rudder Roll Stabilisation of Ships: a Gain Scheduling Control Methodology, in *Actes de : soumis pour American Control Conference*, Boston, USA, 2004.
- [55]: H. Tanguy, G. Lebre, O. Doucy, Multi-Objective optimisation of PID and  $H_\infty$  Fin/Rudder roll controller, in *Actes de : IFAC Conference for Manoeuvring and Control of Marine Crafts*, Gerona, Espagne, 2003.
- [56]: Ching-Yang Tzeng, Chung-Yi Wu, On the design and analysis of ship stabilising fin controller, *Journal of Marine Science and Technology*, pages 117-124, No 2, vol. 8, 2000.
- [57]: J.V. Wehausen, The motion of floating bodies, in : *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Review Inc., Palo Alto (Californie), USA, 1971.

## **Annexes**

## Représentation LFT

Les LFT ou Représentations Fractionnelles Linéaires (*Linear Fractional Transform*) permettent de décrire et de généraliser beaucoup d'opérations en automatique (principalement linéaire, mais pas uniquement). C'est un outil puissant, même si son utilisation est délicate, surtout en raison de l'importance numérique des calculs.

Le concept général repose dans le bouclage partiel – occupant une partie des sorties et entrées – d'une matrice par une autre matrice ; on parlera de LFT supérieure (figure C.1) ou inférieure (figure C.2).

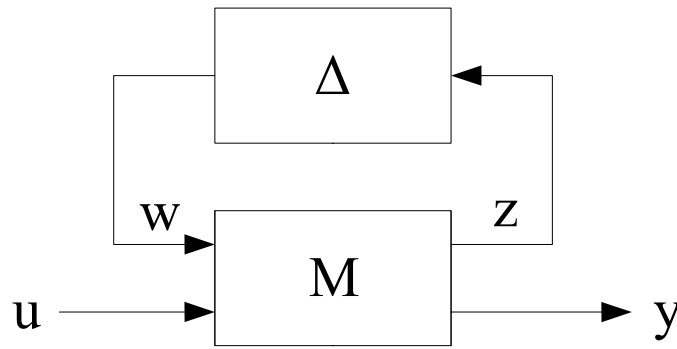


Figure C.1 LFT supérieure

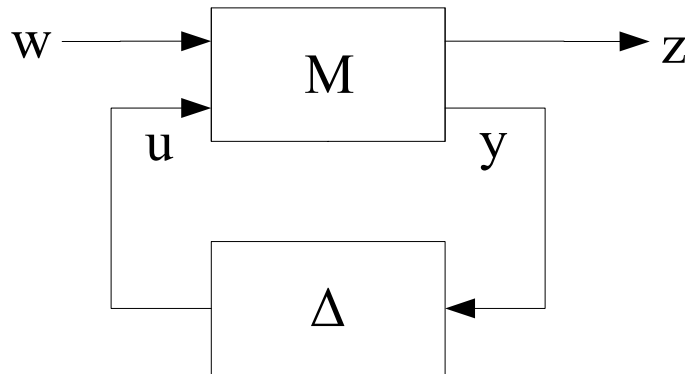


Figure C.2 LFT inférieure

En découpant la matrice  $M$  en blocs (C.1), le calcul de la relation entre  $w$  et  $z$  est, dans le cas de la LFT supérieure : (C.2), dans le cas inférieur : (C.3).

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (C.1)$$

$$F_u(M, \Delta) = \left[ M_{22} + M_{21} \Delta (I - M_{11} \Delta)^{-1} M_{12} \right] \quad (C.2)$$

$$F_l(M, \Delta) = \left[ M_{11} + M_{12} \Delta (I - M_{22} \Delta)^{-1} M_{21} \right] \quad (C.3)$$

Les variables  $M$  et  $A$  sont des matrices quelconques (réelles ou complexes). L'indistinction dans le traitement des matrices permet par exemple de représenter n'importe quelle matrice dont les coefficients dépendent de manière rationnelle dans certains paramètres. Par exemple, l'expression d'une fonction de transfert à partir de la matrice système (C.4) (voir figure C.3) est donnée par (C.5).

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B = D + C \frac{1}{s} \left( I - \frac{1}{s} A \right)^{-1} B = F_u \left( \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \frac{1}{s} I \right) \quad (C.5)$$

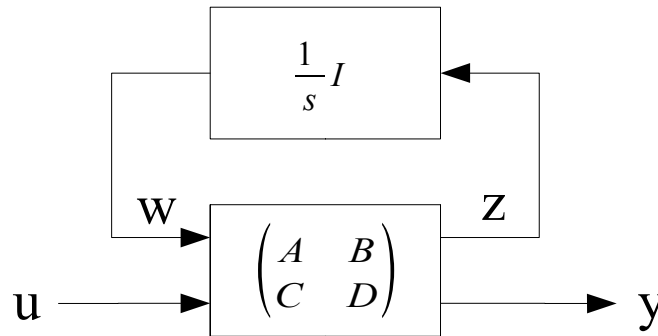


Figure C.3 Forme LFT d'une fonction de transfert (voir équation C.5)

Le modèle standard défini par (C.6) (voir figure C.4) correspond à la représentation LFT du bouclage du système  $M$  par un correcteur  $K$  :

$$T_{zw} = F_l(M(s), K(s)) \quad (C.6)$$

Dans le même ordre d'idées, les incertitudes du modèle peuvent être représentés par une LFT supérieure, voir figure C.1, dont la matrice  $\Delta$  obéit à une structure particulière :  $\Delta$  est diagonale par blocs, et chaque bloc sera :

- un bloc réel diagonal :  $\delta_i I_{r_i}$ , dont les coefficients sont identiques ( $r_i$  répétitions d'une valeur propre  $\delta_i$ ),
- un bloc complexe diagonal :  $\epsilon_i I_{c_i}$ , dont les coefficients sont identiques ( $c_i$  répétitions d'une valeur propre  $\epsilon_i$ ),
- une matrice de transfert :  $\Delta_i(s)$ .

On notera classiquement cet ensemble  $\underline{\Delta}$ . Il est défini mathématiquement par (C.7).  $\delta_i$  est réel,  $\epsilon_i$  complexe, et  $\Delta_i$  est une matrice de transfert stable et propre.

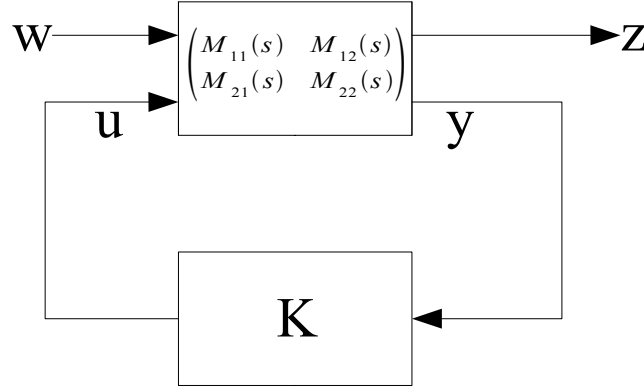


Figure C.4 Représentation LFT de la fermeture de boucle par un correcteur K

$$\underline{\Delta} = \left\{ \Delta(s) = \text{diag} \left( \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \epsilon_1 I_{c_1}, \dots, \epsilon_c I_{c_c}, \Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s) \right) \right\} \quad (\text{C.7})$$

Supposons, à titre d'exemple que la matrice A de la matrice système (C.4) soit incertaine : ses coefficients varient sous la forme suivante, le paramètre  $\delta$  variant entre  $-I$  et  $I$  :

$$A = A_0 + \delta A_1 \quad (\text{C.8})$$

Pour simuler la perturbation, nous introduisons une entrée et une sortie fictives ( $w$  et  $z$ ) telles que :  $z = A_1 x$  et  $w = \delta z$ . Alors, on écrit le système augmenté par les nouvelles entrée et sortie :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u + w \\ y = C x + D u \\ z = A_1 x \end{cases} \quad \text{avec } w = \delta z \quad (\text{C.9})$$

Soit, en écriture LFT :

$$P = F_l \left( \begin{pmatrix} A_0 & B & I \\ C & D & 0 \\ A_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \delta I \right) \quad (\text{C.10})$$

Les systèmes (C.4) et (C.8) sont rigoureusement équivalents si  $\delta = 0$ . Dans le cas contraire, le système (C.8) est perturbé. Cette modélisation est utilisée dans l'application de la  $\mu$ -analyse (et  $\mu$ -synthèse) et dans le cadre de la synthèse à gains programmés par LFT.